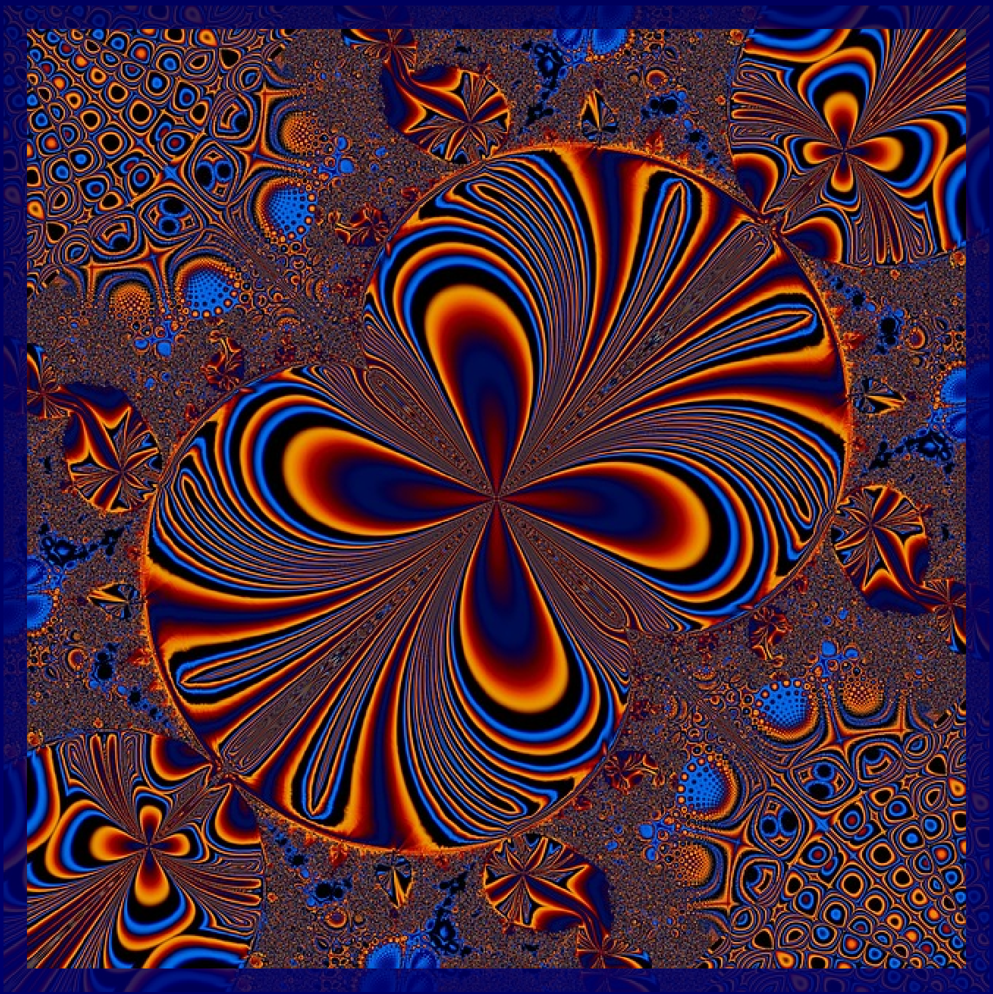
Cahier de vacances
De la première
Vers la terminale
Spécialité Mathématiques

LYCEE
LE CASTEL

S. BELLAASSALI



Sommaire

Introduction

Ce cahier est destiné aux lycéens qui intégreront à la rentrée de septembre une terminale générale avec l'enseignement de spécialité mathématiques ou l'option mathématiques complémentaires.
Ce cahier est un recueil de méthodes et outils portant sur l'ensemble du programme de première ainsi qu'un rappel sur les bases de calcul (à la fin du cahier.)
Il propose des exercices à traiter avant la rentrée pour envisager plus sereinement l'année de terminale.
Chaque exercice proposé est corrigé.
Ce travail sera d'autant plus efficace si vous le faites avec sérieux et de manière autonome.
Même si vous n'arrivez à pas faire l'ensemble des exercices, l'objectif essentiel est de bien comprendre les exemples et les exercices traités.
Quelques conseils d'organisation :

- ▷ Echelonner votre travail sur une période large en travaillant régulièrement.
- ▷ S'assurer que l'on maîtrise le cours et comprendre les exemples avant de faire les exercices.
- ▷ Ne commencer pas par ragarder le corrigé avant d'essayer de faire sérieusement l'exercice.
- ▷ Faire les exercices avec rigueur en prenant soin de noter les points qui vous posent problème et les retravailler avec votre professeur de mathématiques à la rentrée.
- ▷ N'hésitez pas à refaire les exercices (ou même les exemples) que vous avez l'impression de ne pas bien comprendre.

Si vous avez du mal sur les calculs de base, nous vous recommandons de bien traiter la partie sur les bases de calculs.

S. BELLAASSALI

Partie 1

Équations et inéquations

I Premier degré

Méthode

On appelle problème du premier degré à une inconnue tout problème qui conduit à la résolution d'une équation du type $ax = b$ ou d'une inéquation du type $ax \leqslant b$ (ou $ax < b$ ou $ax \geqslant b$ ou $ax > b$).

1 Équations du premier degré

Méthodes

Méthode

Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on se ramène à une équation du type $ax = b$.

- ▷ Si $a \neq 0$ alors $x = \dfrac{b}{a}$
- ▷ Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation n'a pas de solution.
- ▷ Si $a = 0$ et $b = 0$ alors l'équation a une infinité de solution.

Exercices

01 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1 $x - 12 = 3x + 4$.

2 $7(x-3) - 4(x-1) = 4$.

3 $5(x+2) - 2(x-8) = 3(x+1)$

4 $\dfrac{x}{2} - 11 = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{1}{4}$.

5 $\dfrac{x+5}{2} - \dfrac{6x-9}{4} = 1 - \dfrac{x-1}{3}$.

2 Inéquations du premier degré

Méthodes

Méthode

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.
Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, on se ramène à une inéquation du type $ax \leqslant b$ (ou $ax < b$ ou $ax \geqslant b$ ou $ax > b$).
On considère l'inéquation $ax \leqslant b$.

- ▷ Si $a > 0$ alors on a $x \leqslant \frac{b}{a}$;
- ▷ Si $a < 0$ alors on a $x \geqslant \frac{b}{a}$;
- ▷ Si $a = 0$ alors l'inéquation a une infinité de solutions si $b \geqslant 0$ et n'a pas de solution si $b < 0$.

Exercices

02 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes.

1. $-2x \leqslant 4$.
2. $-2x > -2$.
3. $x < -x$.
4. $2x + 7 + 3(1 - x) \leqslant 1 - \frac{3x}{4}$
5. $2(x+1) + 3(2x+1) < 5(x+2) - \frac{3}{2}(1 - 2x)$.
6. $7(1 - x) + 2(x - 2) \geqslant -5x$

II Équations de degré supérieur ou égal à 2

1 Équations du second degré

Méthodes

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

- ▷ On lit les coefficients a, b et c ;
- ▷ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- ▷ Suivant le signe du discriminant, on en déduit les solutions de l'équation si elles existent :
  - Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle et on note $S = \emptyset$.
  - Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on note $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.
  - Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on note $S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Exemple

Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$.
On a $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$
$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = 1$.

Remarque

1 Lorsque $c = 0$, il n'y a pas besoin d'utiliser la méthode du discriminant pour résoudre l'équation, il suffit de factoriser (voir le paragraphe suivant).

2 Il n'est pas utile d'utiliser la méthode du discriminant non plus pour résoudre les équations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
Pour $a > 0$, on a $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. (Si $a < 0$ alors l''équation n'a pas de solution réelle et si $a = 0$ alors on a $x = 0$.)

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - 8 = 0$.
On a $x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = -\sqrt{8}$ ou $x = \sqrt{8} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{2}$ ou $x = 2\sqrt{2}$.

Exercices

03 Résoudre les équations suivantes :

1 $2x^2 - 2x - 12 = 0$.
4 $3x^2 + \sqrt{12}x + 1 = 0$.
7 $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.
2 $-x^2 + x + 2 = 0$.
5 $2x^2 + 12x + 18 = 0$.
8 $x(x+4) + 8 = 0$.
3 $-3x^2 + 7x + 1 = 0$.
6 $-4x + 2x^2 + 4 = 0$.
9 $2(1 - 3u) = u^2 - 3(2u + 1)$.

2 Factoriser pour résoudre

Exemples

Remarque

Certaines équations de degré supérieur ou égal à 2 nécessitent (ou dans certains cas c'est plus pratique) une factorisation pour se ramener à un produit nul pour les résoudre.

Exemple

1 Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $5x^2 - 3x = 0$.

On a $6x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ ou $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

2 Soit $E = x^3 - 15x^2 + 71x - 105$

a. Vérifions que 3 est une racine de E.
Pour $x = 3$ on a $3^3 - 15 \times 3^2 + 71 \times 3 - 105 = 0$. Donc $x = 3$ est une racine de E.

b. Puisque $x = 3$ est une racine de E alors on peut écrire $E = (x-3)(ax^2 + bx + c)$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in R$.
Déterminons les valeurs de a, b et c.
On a $E = (x-3)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3bx-3c = ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$.
Or $E = x^3 - 15x^2 + 71x - 105$ donc par identification, on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -15 \\ c - 3b = 71 \\ -3c = -105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = \dfrac{-105}{-3} = 35 \\ b = 3a - 15 = -12 \\ c - 3b = 71 \end{cases}.$$

La dernière équation sert à vérifier la cohérence des valeurs trouvées pour a, b et c.
Or on a $c - 3b = 35 - 3 \times (-12) = 71$ donc on a bien $a = 1$, $b = -12$ et $c = 35$ et donc $E = (x-3)(x^2 - 12x + 35)$.

c. Résolvons $E = 0$.
On a $E = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 12x + 35) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x^2 - 12x + 35 = 0$.
Résolution de $x^2 - 12x + 35 = 0$.
On a $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 35 = 4 > 0$ et donc l'équation $x^2 - 12x + 35 = 0$ a deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-(-12) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 5$ et $x_2 = \dfrac{12 + \sqrt{4}}{2} = 7$.
Or $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ donc l'équation $E = 0 \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 7$ ou $x = 3$..

Exercices

04 Résoudre les équations suivantes sans calculer le discriminant.

1 $3x^2 - 5 = 0$.

2 $7x^2 + 2x = 0$.

3 $x^2 - 9 + 4(x+3) = 0$.

4 $5(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+2)$.

5 $x^2 - 26x + 169 = 0$.

6 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

05 Soit $E = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$

1 Vérifier que 2 est une racine de E.

2 On pose $E = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in R$.
Déterminer les valeurs de a, b et c.

3 Résoudre $E = 0$.

III Équations quotient

Méthode

Pour résoudre une équation quotient :

1. **Il faut d'abord déterminer les valeurs interdites** (les valeurs annulant un dénominateur) ;
2. On se ramène à $\frac{A}{B} = 0$ puis utiliser $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $\dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{1-2x}{x-5}$.

- ▷ Les valeurs interdites pour x sont $x = 2$ et $x = 5$.
- ▷ On a $\dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{1-2x}{x-5} \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x-5)}{(x-2)(x-5)} - \dfrac{(1-2x)(x-2)}{(x-5)(x-2)} = 0$

  $\Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x-5)-(1-2x)(x-2)}{(x-2)(x-5)} = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-5)-(1-2x)(x-2) = 0.$

  Or $(x+3)(x-5)-(1-2x)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-15-(-2x^2+5x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-15+2x^2-5x+2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2-7x-13 = 0.$

  On a donc $\Delta = 205 > 0$. Donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{205}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{205}}{6}$

Exercices

06 Résoudre les équations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x-2} + x + 3 = 0.$
2. $\dfrac{3x-4}{x+1} = \dfrac{x-1}{2x+3}.$
3. $\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{2}.$

IV Signe d'une expression et résolution d'inéquations

Méthodes

Méthode

1 Si x_1 et x_2 sont les racines d'un polynôme du second degré ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ alors la forme factorisée de ce polynôme est $a(x-x_1)(x-x_2)$.

2 Si x_0 une racine double d'un polynôme du second degré ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ alors la forme factorisée de ce polynôme est $a(x-x_0)^2$.

3 Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

4 Pour résoudre une inéquation qui n'est pas de degré 1 :

- ▷ Soit on se ramène à une inéquation produit (en factorisant), c'est à dire, le membre gauche de l'inégalité est un produit et le membre droit est 0, et en utilisant le tableau de signe du produit.
- ▷ Soit on se ramène à une inéquation quotient (en réduisant au même dénominateur)), c'est à dire, le membre gauche de l'inégalité est un quotient et le membre droit est 0, et en utilisant le tableau de signe d'un quotient. On prendra bien soin, dans ce cas, de bien déterminer les valeurs interdites.
- ▷ Soit on utilise les propriétés des fonctions utilisées comme par exemple la fonction exponentielle (voir plus loin).
- ▷ S'il s'agit d'une inéquation où le membre gauche est un polynôme du second degré et le membre droit est 0, pour établir le tableau de signe, on utilisera la règle suivante :
  Un polynôme du second degré ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ a toujours le signe de a sauf lorsque x est compris entre les racines.

Exemple Résolvons l'inéquation $2x^2-3x+1>0$ dans $\mathbb{R}$.

- ▷ On résout l'équation du second degré $2x^2-3x+1=0$.
  L'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
- ▷ On dresse le tableau de signes de $2x^2-3x+1$.
  $a=2$ donc $a>0$, on en déduit donc qu'on a

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- ▷ Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup \left]1\,;\,+\infty\right[.$$

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x-3}{-x^2-x+6} \geqslant 0$.

On a $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

$-x^2-x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-3$. Donc 2 et -3 sont les valeurs interdites pour x.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x-3}{-x^2-x+6}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S=]-\infty\,;\,-3[\,\cup\left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right[$.

Exercices

07 Résoudre les inéquations suivantes :

1 $-3x^2+4x+1 \leqslant 0$.

2 $2x^2+8x>4$.

3 $2x^2-x+1 \leqslant x^2+3x-4$.

4 $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}<1$.

5 $\dfrac{x+1}{2x^2-5x-4}<0$.

Éléments de corrigé des exercices

01

1. $x=-8$.
2. $x=7$.
3. L'équation n'a pas de solution.
4. $x=-\frac{1}{4}-11=-\frac{45}{4}$.
5. $x=\frac{41}{8}$.

02 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes.

1. $x \geqslant -2$.
2. $x<1$.
3. $x<-x \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0$.
4. $x \geqslant 36$
5. $2(x+1)+3(2x+1)<5(x+2)-\frac{3}{2}(1-2x) \Leftrightarrow 8x+5<8x+\frac{17}{2} \Leftrightarrow 5<\frac{17}{2}$. Donc l'inéquation à une infinité de solutions.
6. $7(1-x)+2(x-2) \geqslant -5x \Leftrightarrow 3 \geqslant 0$. Donc l'inéquation à une infinité de solutions.

03

1. $2x^2-2x-12=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=3$.
2. $-x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=2$.
3. $-3x^2+7x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{7-\sqrt{61}}{6}$ ou $x=\frac{7+\sqrt{61}}{6}$.
4. $3x^2+\sqrt{12}x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. $2x^2+12x+18=0 \Leftrightarrow x=-3$.
6. $-4x+2x^2+4=0$. $\Delta=-16<0$ donc $S=\emptyset$.
7. $x^2-3\sqrt{2}x+4=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=2\sqrt{2}$.
8. $x(x+4)+8=0 \Leftrightarrow x^2+4x+8=0$. $\Delta=-16<0$ donc $S=\emptyset$.
9. $2(1-3u)=u^2-3(2u+1) \Leftrightarrow u^2-5=0 \Leftrightarrow u=\sqrt{5}$ ou $u=-\sqrt{5}$.

04

1 $3x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{5}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{5}{3}}$ ou $x=-\sqrt{\frac{5}{3}}$.

2 $7x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(7x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{2}{7}$.

3 $x^2-9+4(x+3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)+4(x+3)=0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=-1$.

4 $5(x^2-1)=3(x-1)(x+2) \Leftrightarrow 5(x-1)(x+1)-3(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{1}{2}$.

5 $x^2-26x+169=0 \Leftrightarrow x^2-2\times 13\times x+13^2=0 \Leftrightarrow (x-13)^2=0 \Leftrightarrow x=13$.

6 $x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)+x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

05

1 On a $2^3-10\times 2^2+31\times 2-30=0$ donc 2 est une racine de E.

2 On trouve $a=1$, $b=-8$ et $c=15$.

3 $E=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-8x+15)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=3$ ou $x=5$.

06

1 $x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

2 $\frac{3x-4}{x+1}=\frac{x-1}{2x+3} \Leftrightarrow 5x^2+x-11=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{221}}{10}$ ou $x=\frac{-1+\sqrt{221}}{10}$.

3 $x=2$ ou $x=5$.

07

1 $S=\left]-\infty\,;\,\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right]\cup\left[\frac{2+\sqrt{7}}{3}\,;\,+\infty\right[$.

2 $S=\left]-\infty\,;\,-2-\sqrt{6}\right]\cup\left[-2+\sqrt{6}\,;\,+\infty\right[$.

3 $2x^2-x+1\leqslant x^2+3x-4 \Leftrightarrow x^2-4x+5\leqslant 0 \Leftrightarrow S=\emptyset$.

4 $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}<0 \Leftrightarrow \frac{1-x+1-(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}<0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x+1}{(x-1)(x+1)}<0$.

En utilisant un tableau de signe, on obtient $S=\left]-\infty\,;\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]-1\,;\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup]1\,;\,+\infty[$.

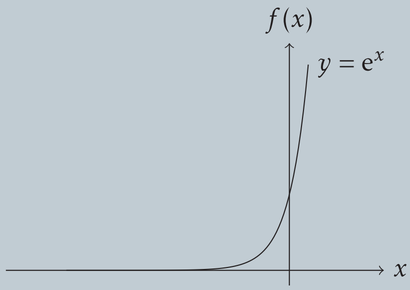
Fonction exponentielle

Rappel

Pour tous réels x, y et entier relatif n :

- ▷ $\mathrm{e}^0 = 1$.
- ▷ $\mathrm{e}^x > 0$.
- ▷ La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ▷ $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
- ▷ $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$.
- ▷ $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$.
- ▷ $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.
- ▷ $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.
- ▷ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = y$ et $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x < y$.
- ▷

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 ↗	$+\infty$



Méthodes

Pour résoudre une équation d'inconnue x réel comportant des exponentielles :

1 On détermine l'ensemble de validité de l'équation.

2 On essaye selon le cas de se ramener à :

- Une équation de la forme $\mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions.
  Dans ce cas, $\mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x) \Leftrightarrow u(x) - v(x) = 0$.
- Une équation qu'on sait résoudre après avoir effectué un changement de variable.

3 La méthode est analogue pour résoudre une inéquation.

Exemple Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions des équations et inéquations.

1 $e^{x^2+2x-3} = 1$.

On a $e^{x^2+2x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+2x-3} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 1$.
Donc, $\mathcal{S} = \{-3 \,;\, 1\}$.

2 $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$

On a $2e^{2x} - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 = 0$ en posant $X = e^x$.

$2X^2 - X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = 1$. D'où, $e^x = -\dfrac{1}{2}$ (impossible car $e^x > 0$) ou $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Finalement, l'équation $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$ n'a que 0 pour solution. Donc, $\mathcal{S} = \{0\}$.

3 $e^{\sqrt{3x-5}} < e$

Il faut que x soit tel que $3x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{5}{3}$ donc on résout dans $\left[\dfrac{5}{3} \,;\, +\infty\right[$.

On a $e^{\sqrt{3x-5}} < e^1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-5} < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3x - 5 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant x < 2$. Donc, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{5}{3} \,;\, 2\right[$.

4 $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1}$.

On a $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow e^{2x+1-x+4} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow e^{x+5} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow x + 5 \geqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leqslant 0$.

En utilisant un tableau de signe, on obtient $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Donc, $\mathcal{S} = [-2 \,;\, 3]$.

Exercices

01 Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer les réels suivants en fonction de e^x.

1. $A = e^{-x}$
2. $B = e^{2x}$
3. $C = e^{2x}e^{-x}$
4. $D = \sqrt{e^{2x}}$
5. $E = \sqrt{e^{-2x}}$
6. $F = e^{\frac{x}{2}}$
7. $G = \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}}$
8. $H = e^{5x}\sqrt{e^{-8x}}$

02 Simplifier les expressions suivantes :

1. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.
2. $(e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}\left(e^{3x} - e^{-x}\right)$.
3. $(e^x - e^{-x})\left(e^{2x} + e^x + 1\right)$.
4. $\left(e^{3x}\right)^2 + \left(e^{-3x}\right)^2 - \left(e^{3x} - e^{-3x}\right)^2$.
5. $\left(e^{3x}\right)^2 - e^{2x}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2$.

03 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{\frac{-x}{2}+1} = 1$.
2. $e^{x-1} = e^{x^2}$.
3. $e^{3-x^2} = e$.
4. $e^x - e^{-x} = 0$.
5. $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.
6. $e^{2x} < e^2$.
7. $2e^{-x} - 2 \geqslant 0$.
8. $e^{x^2-5x} \geqslant e^{-6}$.
9. $1 + e^{-2x} > 1$.

Éléments de corrigé des exercices

01

1 $A = \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

2 $B = \mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{e}^x)^2$.

3 $C = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{2x-x} = \mathrm{e}^x$.

4 $D = \sqrt{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{\frac{2x}{2}} = \mathrm{e}^x$.

5 $E = \sqrt{\mathrm{e}^{-2x}} = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

6 $F = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.

7 $G = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{3x-2x} = \mathrm{e}^x$.

8 $H = \mathrm{e}^{5x}\sqrt{\mathrm{e}^{-8x}} = \mathrm{e}^{5x}\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{5x-4x} = \mathrm{e}^x$.

02

1 $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2 = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2 - \left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2\right) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2 - \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} + 2 = 4$.

2 $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2 - \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2 - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} = 2\mathrm{e}^{-2x} - 2$.

3 $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1\right) = \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - 1 - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x} - 1$.

4 $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}\right)^2 = \mathrm{e}^{6x} + \mathrm{e}^{-6x} - \mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{-6x} + 2 = 2$.

5 $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 - \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)^2 = \mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{-4x} + 2\right) = \mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{6x} - \mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{2x} = -\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{2x}$.

03

1 $\mathrm{e}^{\frac{-x}{2}+1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

2 $\mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^{x^2} \Leftrightarrow x - 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$.

Le discriminant Δ de cette dernière équation est strictement négatif donc l'équation n'a pas de solutions réelles.

3 $\mathrm{e}^{3-x^2} = \mathrm{e} \Leftrightarrow 3 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

4 $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow x = -x$

$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

03 **(suite)**

5 $e^{2x}+2e^{x}-3=0 \Leftrightarrow (e^{x})^{2}+2e^{x}-3=0$.

On pose $X=e^{x}$. On a donc

$$(e^{x})^{2}+2e^{x}-3=0 \Leftrightarrow X^{2}+2X-3=0$$

$\Leftrightarrow X=-3$ ou $X=1$

$\Leftrightarrow e^{x}=-3$ ou $e^{x}=1$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x}>0$ donc on a $e^{x}=1$ et donc $x=0$ est l'unique solution de l'équation.

6 $e^{2x}<e^{2} \Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow x<1$.

7 $2e^{-x}-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2e^{-x} \geqslant 2 \Leftrightarrow e^{-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow -x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$.

8 $e^{x^{2}-5x} \geqslant e^{-6} \Leftrightarrow x^{2}-5x \geqslant -6 \Leftrightarrow$

$x^{2}-5x+6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\,2] \cup [3\,;\,+\infty[$.

9 $1+e^{-2x}>1 \Leftrightarrow e^{-2x}>0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x}>0$ et donc $e^{-2x}>0$. Donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

Partie 3

Dérivation

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I Nombre dérivé et tangente à une courbe

Rappel du cours

Rappel

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a+h \in I$.

1 Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

2 Interprétation graphique : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

3 L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Exemple

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Étudions la dérivabilité de f en $a = 1$.

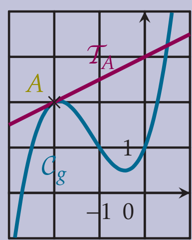
Soit $h \in \mathbb{R}^*$. On a $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2-4-(-3)}{h} = \dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \dfrac{1+h-1}{1+h+1} = \dfrac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2+h$.

Or $\lim\limits_{h\to 0} 2+h = 2$ donc on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$ et donc f est dérivable en $a = 1$ et on a $f'(1) = 2$.

2 Déterminons l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'ascisse $a = 1$.

On a $T : y = f'(1)(x-1)+f(1)$. Or $f(1) = 1^2 = 1$ et $f'(1) = 2$ donc on a $T : y = 2(x-1)+1$ et donc $T : y = 2x-1$.

3 Soit g une fonction dont on donne la représentation graphique ci-contre. La droite $\mathcal{T}_A$ est tangente à la courbe au point A d'abscisse -2.
Déterminons graphiquement $f'(-2)$.



$\mathcal{T}_A$ est la tangente à la courbe au point A d'abscisse -2.

Graphiquement, le coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$ est égal à $\dfrac{1}{2}$. Donc on a $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$.

Exercices

01 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si f est dérivable en a puis déterminer éventuellement $f'(a)$.

1 $f(x) = 2x - 7$, $a = 3$.

2 $f(x) = -3x^2$, $a = 2$.

3 $f(x) = -\dfrac{2}{x}$, $a = 1$

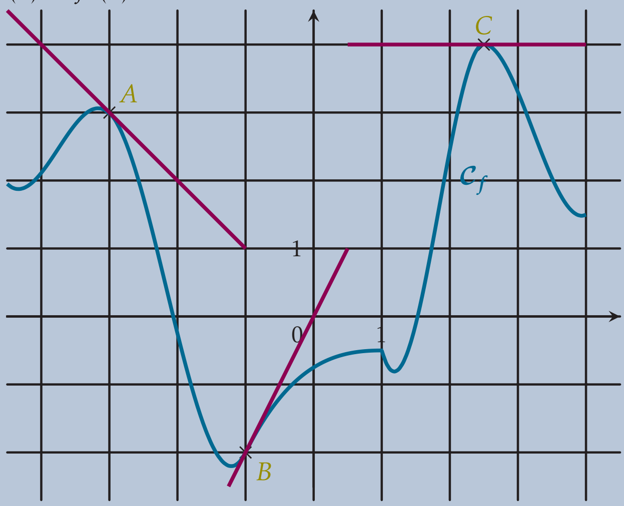
4 $f(x) = \sqrt{x-1}$, $a = 2$

02 On considère la fonction définie par la courbe ci-après et certaines des tangentes à la courbe. Dans chacun des cas suivants, donner $f(a)$ et $f'(a)$.

1 $a = -3$

2 $a = -1$

3 $a = \dfrac{5}{2}$



03 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1 Démontrer que, pour tout réel a, $f'(a) = 2a + 3$.

2 Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

3 Existe-t-il une tangente en un point de $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + \sqrt{17}$?

II Dérivées

Rappel du cours

Rappel

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$]0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$

Rappel

1 Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u' + v'$.
- La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$.
- La fonction $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si de plus v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{v} : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
- Si de plus v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

2 Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour déterminer la fonction dérivée d'une fonction f :

1 On commence par identifier la forme de la fonction f (somme, produit, inverse, quotient de fonctions usuelles) ;

2 On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f ;

3 On dérive séparément chacune des fonctions composant f ;

4 On calcule $f'(x)$ en appliquant les formules de dérivation du cours.

Exemples Déterminons la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1 $f : x \mapsto 7x^3 - 2x^2 + 5$

f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$f'(x) = 7 \times 3x^2 - 2 \times 2x = 21x^2 - 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2 $g : x \mapsto x\sqrt{x}$.
g est définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
$\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

u et v sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$g = uv$ donc g est dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a $g' = (uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a $g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

3 $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 1 \neq 0$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $v(x) = x^2 + 1$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $v'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$h = \dfrac{1}{v}$ et $v(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g' = \dfrac{-v'}{v^2}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

4 $k : x \mapsto \dfrac{x-3}{2x+4}$.

On a $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4}{2} = -2$. Donc k est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on pose $u(x) = x - 3$ et $v(x) = 2x + 4$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et on a donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$.

$k = \dfrac{u}{v}$ et v ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ donc k est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et on a

$k' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Ainsi, pour tout $x \neq -2$, on a $k'(x) = \dfrac{1 \times (2x+4) - (x-3) \times 2}{(2x+4)^2} = \dfrac{10}{(2x+4)^2}$.

Exercices

04 Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1 $f : x \mapsto 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$.

2 $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$.

3 $f : x \mapsto \frac{3}{x^2+1}$.

4 $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

5 $f : x \mapsto (x^2-3)^2$.

6 $f : x \mapsto -\frac{3}{x^2}$.

7 $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{-2x+5}$.

8 $f : x \mapsto 3e^x + 5x^2 - \frac{1}{x}$.

9 $f : x \mapsto 3e^{2x+1}$.

10 $f : x \mapsto xe^x$.

11 $f : x \mapsto \frac{e^x+1}{e^x-1}$.

12 $f : x \mapsto \frac{x^2e^x}{x^2+1}$.

III Applications de la dérivation

Rappel du cours

Rappel

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On a

1. $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I.
2. $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I.
3. $\forall x \in I,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I.
4. Si f admet un extremum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$.

Méthode

Pour déterminer les variations d'une fonction f :

1. On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$.
2. On étudie le signe de $f'(x)$.
3. On en déduit les variations de f et on résume le tout dans un tableau.

Exemple

Déterminons les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} - x$.

- ▷ f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} - 1$.
- ▷ f' est une fonction polynôme du second degré et ses racines sont -1 et 2.

  Comme $a = \dfrac{1}{2} > 0$, on obtient facilement le signe de $f'(x)$ et par conséquent les variations de f et pour avoir un tableau de variations complet, on calcule :

  - $f(-1) = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{-2-3+12}{12} = \dfrac{7}{12}$
  - $f(2) = \dfrac{8}{6} - 1 - 2 = \dfrac{4}{3} - 3 = -\dfrac{5}{3}$

  On a donc

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\dfrac{7}{12}$	$\searrow$	$-\dfrac{5}{3}$	$\nearrow$	

Exercices

05 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1 Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.

2 Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.

3 Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

06 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation grahique.

1 Calculer la dérivée f' de f.

2 Dresser la tableau de variations de f.

3 Soit A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}$ en A.

4 Soit B le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}$ en B.

07 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 2x - \mathrm{e}^{-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1 Calculer la dérivée f' de f.

2 Déterminer le sens de variation de f.

3 Déterminer une équation des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectivement 1 et 0.

08 Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 3 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1 Calculer la dérivée f' de f.

2 Déterminer le sens de variation de f.

3 $\mathcal{C}_f$ admet-elle une tangente horizontale ?

4 Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d d'équation $y = x + 3$.

5 Tracer d et $\mathcal{C}_f$.

Éléments de corrigé des exercices

01

1 Soit $h \neq 0$.

On a $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{6+2h-6}{h} = 2$.

Donc on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = 2$.

Donc f est dérivable en $a = 3$ et on a $f'(3) = 2$.

2 Soit $h \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{-3(2+h)^2+12}{h}\\ &= \frac{-12h-3h^2}{h}\\ &= \frac{h(-12-3h)}{h}\\ &= -12-3h.\end{aligned}$$

Donc on a

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -12-3h = -12$.

Donc f est dérivable en $a = 2$ et on a $f'(2) = -12$.

3 Soit $h \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{-\frac{2}{1+h}+2}{h}\\ &= \frac{\frac{-2+2(1+h)}{1+h}}{h}\\ &= \frac{2h}{h(1+h)}\\ &= \frac{2}{1+h}.\end{aligned}$$

Donc on a

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{1+h} = 2$.

Donc f est dérivable en $a = 1$ et on a $f'(1) = 2$.

01 (suite)

4 Soit $h \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{\sqrt{h+1}-1}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{h+1}-1)(\sqrt{h+1}+1)}{h(\sqrt{h+1}+1)}\\ &= \frac{h+1-1}{h(\sqrt{h+1}+1)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{h+1}+1}.\end{aligned}$$

Donc on a

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h+1}+1}$

$= \dfrac{1}{2}$.

Donc f est dérivable en $a = 2$ et on a $f'(2) = \dfrac{1}{2}$.

02

1 Graphiquement, on a $f(-3) = 3$ et $f'(-3) = -1$

2 Graphiquement, on a $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = 2$

3 Graphiquement, on a $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 4$ et $f'\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$

03

1 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2+3(a+h)-1-a^2-3a-1}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2+3a+3h-1-a^2-3a-1}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2+3h}{h}\\ &= \frac{h(2a+h+3)}{h}\\ &= 2a+h+3\end{aligned}$$

Donc on a

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a+h+3$

$= 2a+3.$

Donc f est dérivable en a et on a

$f'(a) = 2a+3.$

2 On a $f(1) = 3$ et $f'(1) = 5$ donc l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est :

$y = f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y = 5(x-1)+3 \Leftrightarrow$ $y = 5x-2.$

3 Deux droites sont parallèles $\Leftrightarrow$ elles ont le coefficient directeur.

Le coefficient directeur de la tangente en un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscise $a \in \mathbb{R}$ est égal $f'(a)$, et le coefficient directeur de la droite d'équation $y = -2x+\sqrt{17}$ est égal à -2.

On a

$f'(a) = -2 \Leftrightarrow 2a+3 = -2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{5}{2}.$

Donc la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a = -\dfrac{5}{2}$ est parallèle à la droite d'équation $y = -2x+\sqrt{17}$.

04

1 $f : x \mapsto 5x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x}.$

f est une somme d'une fonction polynôme et la fonction inverse donc elle est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$f'(x) = 15x^2 - x + \dfrac{1}{x^2}.$

04 (suite)

2 $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}.$

f est définie sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall x \in [0\,;+\infty[$, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

u et v sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f = uv$ donc f est dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et on a $f' = (uv)' = u'v+uv'$.

Ainsi, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a

$f'(x) = 2x\times\sqrt{x} + x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 2x\sqrt{x} + \dfrac{x\sqrt{x}}{2} = \dfrac{5x\sqrt{x}}{2}.$

3 $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+1}.$

f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4 $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}.$

f est définie sur $[0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ et dérivable sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

On a $f'(x) = \dfrac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$,

$\forall x \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

5 $f : x \mapsto (x^2-3)^2.$

f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = 4x(x^2-3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6 $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2}.$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a $f'(x) = \dfrac{6}{x^3}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

7 $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{-2x+5}.$

f es définie sur $\left]-\infty\,;\dfrac{5}{2}\right[\cup\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$ et dérivable sur cet même ensemble.

On a $f'(x) = \dfrac{-2x^2+10x+7}{(-2x+5)^2}$,

$\forall x \in \left]-\infty\,;\dfrac{5}{2}\right[\cup\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

04 (suite)

8 $f : x \mapsto 3e^x + 5x^2 - \dfrac{1}{x}$.

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a $f'(x) = 3e^x + 10x + \dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

9 $f : x \mapsto 3e^{2x+1}$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = 6e^{2x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

10 $f : x \mapsto xe^x$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

11 $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

12 $f : x \mapsto \dfrac{x^2 e^x}{x^2 + 1}$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = \dfrac{e^x(x^4 + x^2 + 2x)}{(x^2+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

05

1 On a $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$3x^2 - 8x + 4$ a deux racines distinctes : $\dfrac{2}{3}$ et 2.

Donc $f'(x)$ est négative sur $\left[\dfrac{2}{3} ; 2\right]$ et négative ailleurs.

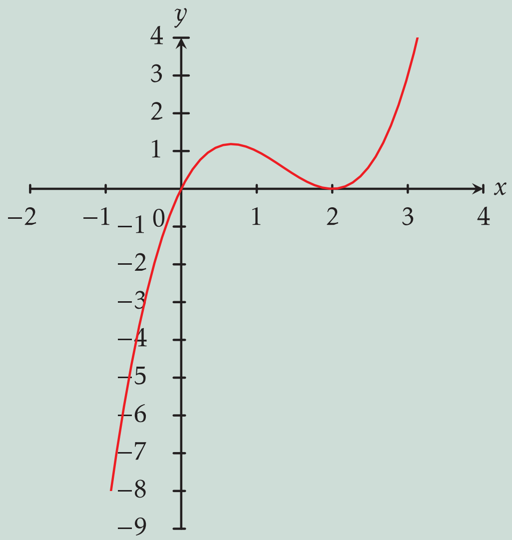
On a le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

f admet deux extrema locaux : un minimum local égal à 0 atteint en $x = 2$ et un maximum local égal à $\dfrac{32}{27}$ atteint en $x = \dfrac{2}{3}$.

05 (suite)

2 La courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.



3 On a $f(0) = 0$ donc la courbe de f coupe l'axe des ordonnées au point O.

On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses au point O et au point de coordonnées $(2;0)$.

06

1 On a $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2 On a $f'(x) < 0$, $\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, donc on a

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

3 On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$. Donc on a $A\left(-\dfrac{3}{2} ; 0\right)$.

On a $T_A : y = f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$.

$f'\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{4}{5}$ donc on a

$T_A : y = -\dfrac{4}{5}x - \dfrac{6}{5}$.

06 (suite)

4 On a $f(0) = -3$ donc on a $B(0\,;-3)$.

On a $T_B : y = f'(0)x + f(0)$.

$f'(0) = -5$ donc on a

$T_B : y = -5x - 3$.

07

1 On a $f'(x) = -2e^{-x} + 2 = 2(1 - e^{-x})$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2 On a $1 - e^{-x} \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant e^{-x} \Leftrightarrow 0 \leqslant -x \Leftrightarrow x \leqslant 0$.

$2 > 0$ donc $f'(x)$ et $1 - e^{-x}$ sont de même signe sur $\mathbb{R}$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

3 L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$\Leftrightarrow y = (2 - 2e^{-1})x + 3e^{-1}$.

08

1 On a $f'(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \neq 0$, donc $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de tangente horizontale.

4 On a $f(x) - (x+3) = \dfrac{2}{e^x+1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de la droite d.

Partie 4

Suites numériques

Rappel

1 Une suite (u_n) peut-être définie :

- de manière explicite : $u_n = f(n)$, $\forall n$.
- de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

2 Suites arithmétiques :

- Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$, $\forall n$ (de raison r).
- Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$, $\forall n$, $\forall p$.
- Somme : nombre de termes $\times \dfrac{\text{premier terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme}}{2}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3 Suites géométiques :

- Récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$, $\forall n$ (de raison q).
- Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$, $\forall n$, $\forall p$.
- Somme : premier terme de la somme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ si $q \neq 1$.
  Si $q = 1$ alors la somme est égale à $(n+1)u_0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$. Si $q = 1$ alors $S_n = n+1$.

4 Sens de variation :

- Si pour tout $n, u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si pour tout $n, u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n$, (u_n) est constante.
- Si (u_n) est une suite à **TERMES STRICTEMENT POSITIFS**. Alors :
  $\rightarrow$ (u_n) est strictement croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;
  $\rightarrow$ (u_n) est strictement décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
- Soit f un fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Alors :
  $\rightarrow$ si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors (u_n) est croissante ;
  $\rightarrow$ si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors (u_n) est décroissante.

Remarque

1 Les réciproques des deux propositions précédentes sont fausses : (u_n) peut être croissante et f ne pas l'être sur $\mathbb{R}_+$ (f peut avoir des variations quelconques entre deux entiers consécutifs.)

2 Les deux propositions précédentes ne sont pas valables lorsqu'il s'agit d'une suite définie par une formule de récurrence.

Par exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

(u_n) est décroissante mais la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Rappel

5 Une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

- strictement croissante si $r > 0$;
- strictement décroissante si $r < 0$;
- constante si $r = 0$.

6 La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- strictement croissante si $q > 1$;
- strictement décroissante si $0 < q < 1$;
- constante si $q = 1$.

Méthodes

Représentation graphique d'une suite (u_n) :

1 Le cas d'une suite définie d'une manière explicite : $u_n = f(n)$:
Représenter les points de coordonnées $(n\,;\,f(n))$ qui sont les points d'abscisse positive de la courbe C de f.

2 Le cas d'une suite définie par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

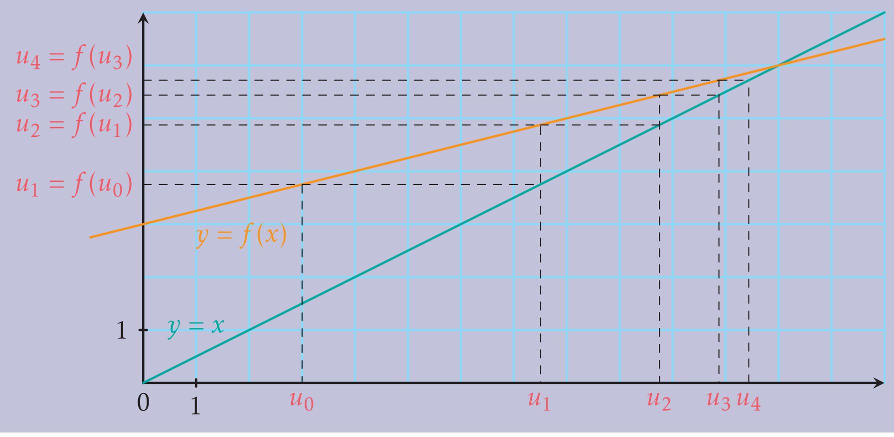
- Construire la courbe représentant f.
- Construire la droite d'équation $y = x$.
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Construire son image u_1.
- La reporter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- Construire de la même façon u_2 puis u_3...

Voir l'exemple ci-dessous :

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Représentons graphiquement les premiers termes de (u_n).



Exemples **Nature d'une suite**

1 **Montrer qu'une suite est arithmétique :**

Montrons que la suite (u_n) par $u_n = 2 + 3n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, est arithmétique.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 + 3(n+1) - (2 + 3n) \\ &= 2 + 3n + 3 - 2 - 3n \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 2$.

2 **Montrer qu'une suite n'est pas arithmétique** :

On utilise un contre-exemple pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique.

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

On a $u_0 = 0$, $u_1 = u_0 + 2 \times 0 = 0$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 = 2$.

$u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 2$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

3 Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -4.

Déterminons sa forme explicite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3 - 4n$.

Exemple

4 Soit la suite arithmétique (v_n) de raison 5 et telle que $v_{10} = 7$.
Déterminons sa forme explicite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_{10} + (n-10)r \Leftrightarrow v_n = 7 + 5(n-10) = 5n - 43$.

5 Montrer qu'une suite est géométrique :

Montrons que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ est géométrique.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{2^{n+2}}{3^{2(n+1)}}}{\dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}} = \frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2^{n+2-n-1}}{3^{2n+2-2n}} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{9}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

6 Montrer qu'une suite n'est pas géométrique :
On utilise un contre-exemple pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique.

La suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \times 2n \end{cases}$ pour $n \geq 1$ est-elle géométrique ?

On calcule les trois premiers termes.
$u_1 = 1$, $u_2 = u_1 \times 2 \times 1 = 2$, $u_3 = u_2 \times 2 \times 2 = 8$.
Puis on calcule les quotients :
$\dfrac{u_2}{u_1} = 2$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{8}{2} = 4$ donc $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.
On en déduit que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

7 Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.
Déterminons sa forme explicite.

$u_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

8 Soit la suite géométrique (u_n) telle que $u_4 = 21$ et de raison 3.
Exprimons u_n en fonction de n.

$u_n = u_4 q^{n-4} = 2 \times 3^{n-4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemples

9 La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a. Calculer u_1 et u_2.

b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

c. On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (v_n) est une suite géometrique en déterminant sa raison et son premier terme.

d. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

a. On a $u_1 = 3u_0 - 4 = -1$ et $u_2 = -7$.

b. $u_1 - u_0 = -1 - 1 = -2$ et $u_2 - u_1 = -7 + 1 = -6$.
$-2 \neq -6$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{-1}{1} = -1$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{-7}{-1} = 7$. $-1 \neq 7$ donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$.
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$
et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$.

d. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = -1 \times 3^n = -3^n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2 = -3^n + 2$.

Remarque

Attention : Calculer les trois premiers termes et vérifier qu'il y a une évolution arithmétique (respectivement, géométrique) ne permet pas de conclure que la suite est arithmétique (respectivement, géométrique.)

Exemples **Monotonie d'une suite**

1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n+1)^2$. Pour étudier les variations de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+1)^2 - (2n+1)^2 \\ &= (2n+3)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) \\ &= 8n + 8 > 0, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

Exemples (suite)

2 On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.

Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$v_{n+1} - v_n = (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n = (v_n)^2 + 2v_n + 1 = (v_n + 1)^2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

3 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc (u_n) est est strictement croissante.

Exercices

01 Pour chacune des suites données ci-dessous, où $n \in \mathbb{N}$:

- $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$;
- $v_n = 5 - 2n$;
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$;
- $x_n = \dfrac{3^n}{n+1}$;
- $y_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1 Calculer les trois premiers termes.

2 La suite est-elle géométrique ? Arithmétique ?

3 Si elle est arithmétique ou géométrique calculer le terme de rang 100.

02

1 u est une suite géométrique de raison $q < 0$ telle que $u_1 = 12$ et $u_5 = 3072$.

a. Calculer q puis u_0.

b. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_6$

2 v est une suite arithmétique de raison r telle que $v_4 = 9$ et $v_1 + v_2 + \cdots + v_8 = 92$.
Calculer r et v_1.

03 Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1 u est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2 v est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{2^{n^2}}{3^n}$.

04

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1 Calculer u_1 et u_2. Justifier (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2 Présenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n).

3 On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_n - 1$.
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

4 Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

5 On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.

05 Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1 Calculer u_1 et u_2. Vérifier que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2 Soit v la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison.

3 Exprimer v_n en fonction de n.

4 En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

06 La suite (d_n) est définie par $\begin{cases} d_0 = 0 \\ d_{n+1} = \sqrt{(d_n)^2 + 2n + 3} \end{cases}$

1 Calculer d_1 et d_2.

2 On pose $u_n = (d_n)^2 - n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

3 Exprimer u_n en fonction de n. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

Éléments de corrigé des exercices

01

1 $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = 1$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ donc, par définition, (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 0$.

c. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 0$ donc on a

$$u_n = u_0 + nr, \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc on a $u_{100} = 0 + 100 \times \frac{1}{2} = 50$.

2 $v_n = 5 - 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a. On a $v_0 = 5$, $v_1 = 3$ et $v_2 = -1$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_{n+1} - v_n = 5 - 2(n+1) - 5 + 2n = -2$.

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $v_0 = 5$.

c. Le terme général v_n est déjà exprimé en fonction de n.

d. On a $v_{100} = -195$.

e. $w_n = (n+1)^2 - n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3 **a.** On a $w_0 = 1$, $w_1 = 3$ et $w_2 = 5$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$w_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2$
$= 2n + 1$.

On a $w_{n+1} - w_n = 2$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $w_0 = 1$.

c. On a $w_n = 2n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d. On a $w_{100} = 201$.

01 (suite)

4 $x_n = \frac{3^n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a. On a $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 3$.

b. On a $x_1 - x_0 = \frac{1}{2}$ et $x_2 - x_1 = \frac{3}{2}$.

$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$ donc (x_n) n'est pas une suite arithmétique.

On a $\frac{x_1}{x_0} = \frac{3}{2}$ et $\frac{x_2}{x_1} = 2$.

$2 \neq \frac{3}{2}$ donc (x_n) n'est pas une suite géométrique.

5 $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a. On a $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$ et $y_2 = \frac{1}{4}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $y_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} y_n$.

Donc (y_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $y_0 = 1$.

c. Le terme général y_n est déjà exprimé en fonction de n.

d. On a $y_{100} = \frac{1}{2^{100}}$.

02

1 **a.** Calcul de q :

On a $u_5 = u_1 q^4 \Leftrightarrow q^4 = \frac{3072}{12} = 256$.

Donc on a $q^2 = 16$ et donc $q = 4$ ou $q = -4$.

$q < 0$ donc $q = -4$.

Clacul de u_0 :

On a $u_0 = u_1 \times q^{-1} \Leftrightarrow u_0 = -3$.

b. On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_6 =$
$-3 \times \frac{1 - (-4)^7}{1 - (-4)} = -\frac{49155}{5} = -9831$.

02 **(suite)**

2 v est une suite arithmétique de raison r telle que $v_4 = 9$ et $v_1 + v_2 + \cdots + v_8 = 92$.
Calcul de r :

On a $v_1 + v_2 + \cdots + v_8 = 92 \Leftrightarrow$

$8 \times \dfrac{v_1 + v_9}{2} = 92$

$v_1 = 9 - 3r$ et $v_9 = 9 + 5r$ donc on a

$4(18 + 2r) = 92 \Leftrightarrow 18 + 2r = 23 \Leftrightarrow r = \dfrac{5}{2}$.

Calcul de v_1 :

On a $v_1 = v_4 - 3r = \dfrac{3}{2}$.

03

1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

On $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1$

$= (u_n - 1)^2 \geqslant 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

2 v est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{2^{n^2}}{3^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on $v_n = \dfrac{2^{n^2}}{3^n} > 0$.

On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^{(n+1)^2}}{3^{(n+1)}} \times \dfrac{3^n}{2^{n^2}}$

$= \dfrac{2^{(n+1)^2 - n^2}}{3} = \dfrac{2^{2n+1}}{3}$.

$n \geqslant 1$ donc on a $2n + 1 \geqslant 3$ et donc on a $2^{2n+1} \geqslant 2^3 > 3$.

Donc on a $\dfrac{2^{2n+1}}{3} > 1$ et donc (v_n) est strictement croissante.

Deuxième méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2^{(n+1)^2}}{3^{(n+1)}} - \frac{3^n}{2^{n^2}} \\ &= \frac{3^n}{2^{n^2}} \left(\frac{2^{2n+1}}{3} - 1 \right). \end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement que la première méthode,

on a $\dfrac{2^{2n+1}}{3} > 1$ et donc $v_{n+1} - v_n > 0$.

04

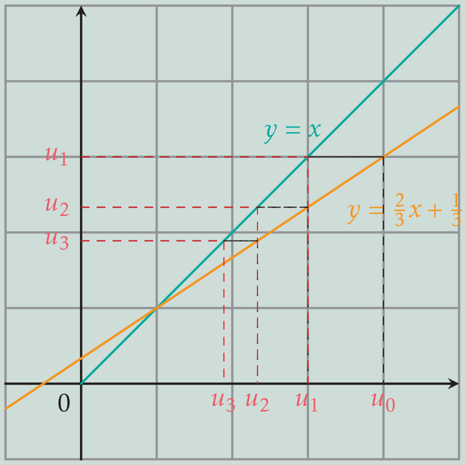
1 On a $u_1 = 3$ et $u_2 = \dfrac{7}{3}$.

On a $u_1 - u_0 = -1$ et $u_2 - u_1 = -\dfrac{2}{3}$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

On a $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{7}{9}$.

$\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{7}{9}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométique.

2 Représentons graphiquement les 4 premiers termes de (u_n).



3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 1) \\ &= \frac{2}{3}v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 3$.

4 (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 3$ donc on a

$v_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

04 (suite)

5 Soint $n \in \mathbb{N}$.

Expression de S_n :

On a $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$= 3 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Expression de S'_n :

On a $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$= S_n + (n+1) = 9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + n + 1.$$

05

1 On a $u_1 = 5$ et $u_2 = \frac{11}{7}$.

On a $u_1 - u_0 = 6$ et $u_2 - u_1 = -\frac{24}{7}$.

$6 \neq -\frac{24}{7}$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

On a $\frac{u_1}{u_0} = -5$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{11}{35}$.

$-5 \neq \frac{11}{35}$ donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+3} \\ &= \frac{\frac{u_n+6}{u_n+2}-2}{\frac{u_n+6}{u_n+2}+3} \\ &= \frac{\frac{u_n+6-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{u_n+6+3u_n+6}{u_n+2}} \\ &= \frac{\frac{-u_n+2}{u_n+2}}{\frac{4u_n+12}{u_n+2}} \\ &= \frac{-u_n+2}{4u_n+12} \\ &= -\frac{1}{3} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} \\ &= -\frac{1}{3} v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme

$v_0 = -\frac{3}{2}$.

05 (suite)

3 (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{3}{2}$ donc on a

$v_n = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$

4 Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$

$\Leftrightarrow v_n(u_n + 3) = u_n - 2$

$\Leftrightarrow v_n u_n + 3v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3v_n - 2$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{-3v_n - 2}{v_n - 1}.$

Donc on a $u_n = \dfrac{\frac{9}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2}{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1}$

06

1 On a $d_1 = \sqrt{3}$ et $d_2 = \sqrt{8}$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (d_{n+1})^2 - (n+1)^2 \\ &= (d_n)^2 + 2n + 3 - n^2 - 2n - 1 \\ &= u_n + 2. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$.

3 Expression de u_n en fonction de n :

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$ donc on a

$u_n = 2n, \forall n \in \mathbb{N}.$

Expression de d_n en fonction de n :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_n = (d_n)^2 - n^2 \Leftrightarrow (d_n)^2 = u_n + n^2 \Leftrightarrow (d_n)^2 = 2n + n^2$

$\Leftrightarrow d_n = \sqrt{n^2 + 2n}$ ou $d_n = -\sqrt{n^2 + 2n}.$

$d_1 = \sqrt{3} > 0$ donc on a

$d_n = \sqrt{n^2 + 2n}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Probabilités

On considère une expérience aléatoire et on note par Ω son univers.

I Probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements

Rappel

1 On a

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1)$;
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Pour la suite, on suppose que $P(A) \neq 0$ **et** $P(B) \neq 0$.

2 La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

3 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est un système complet d'événements (ou partition de l'univers) si aucun n'est un événement impossible, que leur union est égale à Ω ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$) et qu'ils sont incompatibles deux à deux.

4 **Formule des probabilités totales :**

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)$$

D'une manière générale, si $A_1, A_2, \ldots$ et A_n forment une partition de Ω alors on a

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B). \end{aligned}$$

5 Formule de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$.

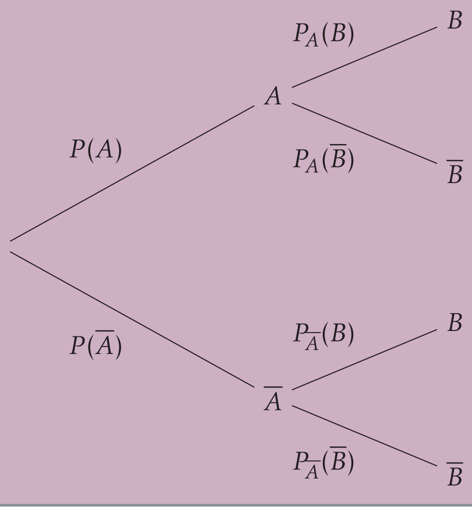
6 A et B sont **indépendants** $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$).

7 A et B sont indépendants $\Leftrightarrow \overline{A}$ et B sont indépendants $\Leftrightarrow A$ et $\overline{B}$ sont indépendants $\Leftrightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Méthode

Les principales règles de construction d'un arbre pondéré :

- la somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud est égale à 1 ;
- La probabilité d'un événement présenté par un chemin est égale au produit des probabilité inscrites sur les branches de ce chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser cet événement.



Exemple

Dans une partie du monde, on estime que 15 % de la population est contaminée par un virus C. La stratégie de dépistage met en place un test.
On a observé les résultats suivants :

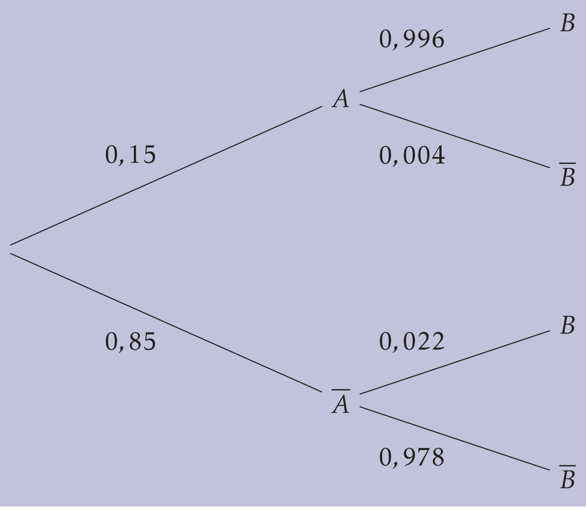
- quand la personne est contaminée par le virus C, le test est positif dans 99,6 % des cas ;
- quand la personne n'est pas contaminée par ce virus, le test est négatif dans 97,8 % des cas.

On considère les événements suivants :

A :« La personne est contaminée par le virus C » ;

B :« La personne a un test positif ».

1 Réalisons un arbre représentant la situation.



Exemple

2 Calculons $P(B)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A\cap B) + P\left(\overline{A}\cap B\right) \\ &= P(A)\times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,996\times 0,15 + 0,022\times 0,85 \\ &= 0,1681. \end{aligned}$$

3 Calculons $P_B(A)$.

On a $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)\times P_A(B)}{P(B)} = \dfrac{0,996\times 0,15}{0,1681} \simeq 0,889.$

Exemple

Dans une population, il y a 71% de porteurs de lunettes parmi lesquels 37% ont 55 ans ou plus.
Dans cette même population, il y a 63% de personnes de moins de 55 ans.
On choisit, au hasard, une personne dans la population et on considère les deux événements :

- A : « la personne a 55 ans ou plus » ;
- L : « la personne porte des lunettes ».

Les événements A et L sont-ils indépendants ?

D'après l'énoncé on a , $P(L) = 0{,}71$, $P(A) = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$ et $P_L(A) = 0{,}37$.
$P(A)\times P(L) = 0{,}37\times 0{,}71 = 0{,}262\,7$ et $P(A\cap L) = P(L)\times P_L(A) = 0{,}71\times 0{,}37 = 0{,}262\,7$.
Comme $P(A)\times P(L) = P(A\cap L)$, on en déduit que A et L sont indépendants.

Exercices

01

1 On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

On sait que $p(A \cup B) = \dfrac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{5}$.
Calculer la probabilité de l'événement B.

2 Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$.
Je sors mon chien calculer la probabilité qu'il ne pleuve pas.

02 Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$.
Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.
On considère les événements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

1 Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les événements précédents.

Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.

2 Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut.

3 Calculer la probabilité de l'événement $F_2 \cap D$.

4 En déduire la probabilité de l'événement $F_3 \cap D$.

5 Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

03 Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1 **a.** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les événements R_1 et R_2.

b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2 Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.

a. Dresser un arbre présentant la situation (la semaine n et la semaine $n+1$).

b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $s_n = r_n - 0,8$.

i. Montrer que (s_n) est une suite géométrique.

ii. Exprimer s_n en fonction de n puis en déduire r_n en fonction de n.

04 On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1 Illustrer la situation par un arbre de probabilités.

2 **a.** Calculer la probabilité des événements $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3$, et $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{N}_3$.

b. En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3$.

c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{N}_3$.

3 Déduire de la question précédente la probabilité de l'événement N_3.

4 Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5 Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

II Variable aléatoire réelle

Rappel

1 Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.

2 L'ensemble image $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par X.

- Si $X(\Omega)$ est un ensemble constitué d'un nombre fini de valeurs, alors X est dite discrète finie.
- Si $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors X est dite continue.

3 $\forall x \in \mathbb{R}$, $(X = x)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.

4 Définir la loi de probabilité d'une variable alétoire X, c'est :

- déterminer toutes les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $X(\Omega)$;
- calculer les probabilités $p_1, \cdots, p_n$ des événements $P(X = x_i)$;
- regrouper les résultats dans un tableau du type

Valeurs prises par X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilité correspondante $P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

5 L'espérance d'une variable aléatoire discrète finie X :

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

6 La variance d'une variable aléatoire discrète finie X : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P(X = x_i)$.

7 Formule de König-Huygens : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$.

8 L'écart type d'une variable aléatoire discrète finie X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

9 Linéarité de l'espérance : $E(aX + b) = aE(X) + b$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

10 Propriété de la variance : $V(aX + b) = a^2 V(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

Exemple Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.
Un joueur participe à la loterie en payant 2 , ce qui lui donne le droit de prélever au hasard un jeton dans l'urne.

- Si le numéro est pair, il gagne en euros le double de la valeur indiquée par le jeton.
- Si le numéro est impair, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au ńgain algébriqueż.
Déterminons la loi de probabilité de X.

On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Les cinq issues sont équiprobables.
Les jetons 1, 3 et 5 font perdre 2 euros ; le jeton 2 fait gagner $2 \times 2 - 2 = 2$ euros ;
le jeton 4 fait gagner $4 \times 2 - 2 = 6$ euros.
On a donc $X(\Omega) = \{-2; 2; 6\}$.

...

Exemple (suite)

L'événement $(X=-2)$ est réalisé pour les issues 1 ; 3 ; 5 donc $P(X=-2)=\frac{3}{5}$.
L'événement $(X=2)$ est réalisé pour l'issue 2 donc $P(X=2)=\frac{1}{5}$.
L'événement $(X=6)$ est réalisé pour l'issue 4 donc $P(X=6)=\frac{1}{5}$.
On présente la **loi de probabilité** de X dans un tableau :

x_i	-2	2	6
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Exemple

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu n° 1

x_i	-5	-1	0	1	3
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu n° 2

y_i	-3	-1	0	1	2
$P(Y=y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Quel jeu peut-on conseiller au joueur ?

Pour le jeu n° 1 : $E(X)=-0,3$, $V(X)=8,01$ et $\sigma(X)\approx 2,83$.
Pour le jeu n° 2 : $E(Y)=-0,3$, $V(Y)=1,81$ et $\sigma(Y)\approx 1,35$.
Les deux jeux ont la même espérance de gain, celle-ci étant négative. Les jeux sont **défavorables** aux joueurs, on peut donc les déconseiller.
L'écart-type mesure la dispersion des gains autour de l'espérance, donc il évalue le **risque du jeu**.
Ici, $\sigma(Y)<\sigma(X)$.
Si un joueur veut vraiment participer, il vaut mieux lui conseiller le jeu n° 2 pour lequel le degré de risque est moins grand.

Exemple

Un coiffeur se déplace à domicile. On choisit une journée au hasard.
On note X le nombre de rendez-vous sur une journée.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,03	0,09	0,15	0,38	0,18	0,17

Chaque rendez-vous lui rapporte 30 euros, et ses frais de fonctionnement quotidiens s'élèvent à 15 euros.
On note Y son gain journalier.

1. Calculer $E(X)$.
2. Quelle relation lie X et Y ?
3. En déduire $E(Y)$.

1. On a $E(X)=0,03\times 0+0,09\times 1+0,15\times 2+0,38\times 3+0,18\times 4+0,17\times 5=3,1$.
2. Le gain journalier Y est tel que $Y=30X-15$.
3. $E(Y)=E(30X-15)=30E(X)-15=30\times 3,1-15=78$.
   Donc le coiffeur peut espérer gagner 78 euros en moyenne par jour.

Exercices

05 Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de passages à l'infirmerie dans un lycée dans une journée.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,35	0,3	0,25	b

1 Calculer le réel b.

2 Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux passages à l'infirmerie dans la journée.

3 Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

06 Une entreprise fabrique des pièces. Pour effectuer un contrôle d'un type de pièces, on mesure avec précision leur diamètre. On rassemble les résultats dans le tableau suivant :

Diamètre en cm	9,8	9,9	10	10,1	10,2
Probabilité	0,05	0,06	0,71	0,14	0,04

Une pièce est dite conforme lorsqu'elle a un diamètre de 10 cm.

1 On tire au hasard une pièce dans le lot. Quelle est la probabilité que cette pièce soit conforme ?

2 Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce mesurée, associe l'écart par rapport à la dimension théorique de 10 cm.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

07 Monsieur X effectue en voiture le même trajet tous les jours. Sur sa route, il y a trois feux.
Une étude statistique, portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats suivants :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

1 Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2 Le trajet sans aucun arrêt dure 15 min et chaque feu rouge rallonge la durée du trajet de 2 min.
Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet de Monsieur X.

a. Quelle relation lie X et T ?

b. En déduire $E(T)$ et $V(T)$.

08 Une urne contient 50 jetons de couleurs bleue, rouge ou jaune. 10 % des jetons sont bleus, il y a trois fois plus de jetons jaunes que de jetons bleus. Un joueur tire un jeton au hasard.

- S'il est rouge, il remporte le gain de base.
- S'il est jaune, il remporte le carré du gain de base.
- S'il est bleu, il perd le cube du gain de base.

On note X le gain à ce jeu.

1 On suppose que le gain de base est 2 euros.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages.

2 On cherche à déterminer la valeur du gain de base g_0, telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au centime d'euro. Soit x le gain de base en euros.

a. Montrer que le problème posé revient à étudier les éventuels extremums de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$.

b. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

c. Conclure.

Éléments de corrigé des exercices

01

1 On a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

A et B sont indépendants donc on a $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

Donc on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B)$.

On a donc $\frac{4}{5} = p(B)(1 - p(A)) + p(A) \Leftrightarrow \frac{4}{5} = p(B)p\left(\overline{A}\right) + \left(1 - p\left(\overline{A}\right)\right)$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{3}{5}p(B) + \frac{2}{5} \Leftrightarrow p(B) = \frac{2}{3}$.

2 On pose Pl : « Il pleut » et S : « Je sors mon chien ».

On a $p_S\left(\overline{Pl}\right) = \dfrac{p\left(S \cap \overline{Pl}\right)}{p(S)} = \dfrac{p_{\overline{Pl}}(S)p\left(\overline{Pl}\right)}{p(S)}$.

D'après la formule des probabilités totales, on a

$p(S) = p(Pl \cap S) + p\left(\overline{Pl} \cap S\right) = p_{Pl}(S)p(Pl) + p_{\overline{Pl}}(S)p\left(\overline{Pl}\right)$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{7}{10}$.

Donc on a $p_S\left(\overline{Pl}\right) = \dfrac{\frac{27}{40}}{\frac{7}{10}} = \frac{27}{28}$.

Donc si je sors mon chien, la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à $\frac{27}{28}$.

02

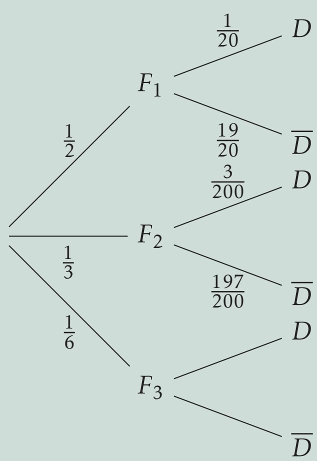
1 On a $p(F_1) = \frac{1}{2}$ et $p(F_2) = \frac{1}{3}$.

On a $p_{F_1}(D) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$,

$p_{F_2}(D) = \frac{1,5}{100} = \frac{3}{200}$,

$p(D) = \frac{3,5}{100} = \frac{7}{200}$.

L'arbre pondéré associé à cette expérience :



02 **(suite)**

2 On a $p(F_1 \cap D) = p(F_1) \times p_{F_1}(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$.

Donc la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut est égale à $\frac{1}{40}$.

3 On a $p(F_2 \cap D) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{200} = \frac{1}{200}$.

4 On a $p(F_3) = 1 - p(F_1) - p(F_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

D'autre part, d'après la formule des parobabilités totales, on a

$p(D) = p(F_1) \times p_{F_1}(D) + p(F_2) \times p_{F_2}(D) + p(F_3) \times p_{F_3}(D)$

$\Leftrightarrow \frac{7}{200} = \frac{1}{40} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6} p_{F_3}(D)$

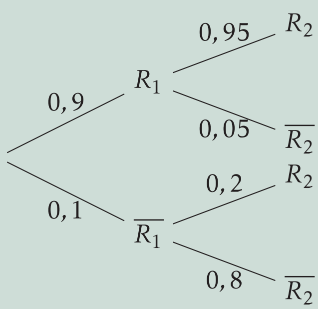
$\Leftrightarrow p_{F_3}(D) = 6\left(\frac{7}{200} - \frac{1}{40} - \frac{1}{200}\right) = 6\left(\frac{6}{200} - \frac{1}{40}\right) = 6\left(\frac{6}{200} - \frac{5}{200}\right) = \frac{6}{200} = \frac{3}{100}$.

On a donc $p(F_3 \cap D) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{100} = \frac{1}{200}$.

5 On a $p_{F_3}(D) = \frac{p(F_3 \cap D)}{p(F_3)} = \frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{200} = \frac{3}{100}$.

03

1 **a.** L'énoncé donne $p(R_1) = 0,9$, $p_{R_1}(R_2) = 0,95$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,2$.



b. On a $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$.

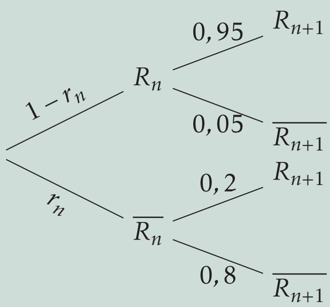
c. R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$p(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = 0,855 + p\left(\overline{R_1}\right) \times p_{\overline{R_1}}(R_2) 0,855 + 0,1 \times 0,2 = 0,875$

d. On a $p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)}{p(R_2)} = \frac{0,02}{0,875} = \frac{4}{175} \approx 0,023$.

03 **(suite)**

2 **a.** On a l'arbre suivant :



b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$r_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) + p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p\left(\overline{R_n}\right)$

$= 0,95 r_n + 0,2(1-r_n) = 0,75 r_n + 0,2.$

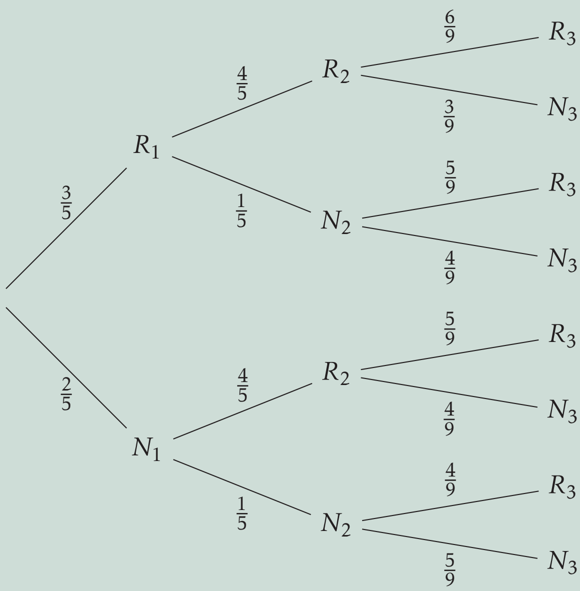
c.

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $s_{n+1} = r_{n+1} - 0,8 = 0,75 r_n + 0,2 - 0,8 = 0,75 r_n - 0,6.$
Or $s_n = r_n - 0,8$ donc on a $r_n = s_n + 0,8$ et donc on a
$s_{n+1} = 0,75(s_n + 0,8) - 0,6 = 0,75 s_n + 0,6 - 0,6 = 0,75 s_n.$
Donc (s_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $s_1 = 0,9 - 0,8 = 0,1.$

ii. (s_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $s_1 = 0,1$ donc on a $s_n = 0,1 \times (0,75)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
$r_n = s_n + 0,8$ donc on a $r_n = 0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

04

1 Arbre de probabilités :



04 **(suite)**

2 **a.** On a $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{45}$;

$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{32}{225}$.

b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_3 \cap N_2) + p(N_1 \cap N_3 \cap R_2) = \frac{2}{45} + \frac{32}{225} = \frac{14}{75}$.

c. De la même manière, on a

$p(R_1 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} = \frac{16}{75}$.

3 On en déduit que

$p(N_3) = p(N_3 \cap R_1) + p(N_3 \cap N_1) = \frac{14}{75} + \frac{16}{75} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$.

4 $p(N_1) = \frac{2}{5}$ et $p(N_3) = \frac{2}{5}$.

D'où $p(N_1)p(N_3) = \frac{4}{25} = \frac{12}{75}$ et $p(N_1 \cap N_3) = \frac{14}{75}$.

On a donc $p(N_1)p(N_3) \neq p(N_1 \cap N_3)$, d'où les évènements N_1 et N_3 ne sont pas indépendants.

5 On a $p_{N_3}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap N_3)}{p(N_3)} = \frac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \frac{16}{75} \times \frac{5}{2} = \frac{8}{15}$.

05

1 On a $0,35 + 0,3 + 0,25 + b = 1 \Leftrightarrow b = 0,1$.

2 On a $P(X \geqslant 2) = P(x = 2) + P(x = 3) = 0,25 + 0,1 = 0,35$.

Donc la probabilité qu'il y ait au moins deux passages à l'infirmerie dans la journée est égale à $0,35$.

3 Calcul de $E(X)$:

On a $E(X) = 1,1$.

Calcul de $V(X)$:

On a $E(X^2) = 0^2 \times 0,35 + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,1 = 2,2$.

Donc on a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2,2 - 1,21 = 0,99$.

06

1 La probabilité que la pièce soit conforme est de 0,71.

2 **a.** La loi de probabilité de X :

x_i	0	0,1	0,2
$P(X = x_i)$	0,71	0,2	0,09

b. On a $E(X) = 0,038$ et $\sigma(X) \simeq 0,0645$.

07

1 On a $E(X) = 1,7$ et $V(X) = 0,81$.

2 **a.** On a $T = 2X + 15$.

b. On a $E(T) = 2E(X) + 15 = 18,4$ et $V(T) = 4V(X) = 3,24$.

08

1 **a.** Il y a 10 % de jetons bleus, donc 30 % de jetons blancs et il reste 60 % de jetons rouges.
Si le jeton tiré est rouge le gain est de 2 euros, s'il est blanc le gain est de 4 euros et s'il est bleu la perte est 8 euros. On a donc le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

x_i	2	4	-8
$P(X = x_i)$	0,6	0,3	0,1

b. On a $E(X) = 0,6 \times 2 + 0,3 \times 4 + 0,1 \times (-8) = 1,2 + 1,2 - 0,8 = 1,6$. Donc sur un grand nombre de tirages, on peut espérer un gain moyen de 1,6 euros par tirage.

2 **a.** Le tableau de la loi de probabilité de X est alors :

x_i	x	x^2	$-x^3$
$P(X = x_i)$	0,6	0,3	0,1

On a $E(X) = 0,6x + 0,3x^2 - 0,1x^3$.
Rechercher la valeur du gain de base de telle que $E(X)$ soit maximale revient à chercher l'éventuel maximum de la fonction f définie sur $[0\,;\,+_infty[$ par $f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$.

b. f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+_infty[$ et on a

$$f'(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 0,6.$$

c. Les racines de $f'(x)$ sont $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f\left(1+\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	

d. L'espérance à ce jeu est maximale lorsque le gain de base est $g_0 = 1 + \sqrt{3} \simeq 2,73$.
Le gain moyen espéré, dans ce cas, est environ $f\left(1+\sqrt{3}\right) \simeq 1,84$ euro.

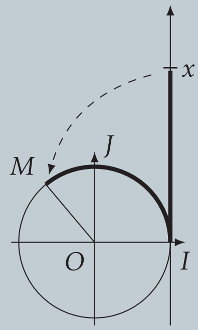
Fonctions trigonométriques

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Rappel

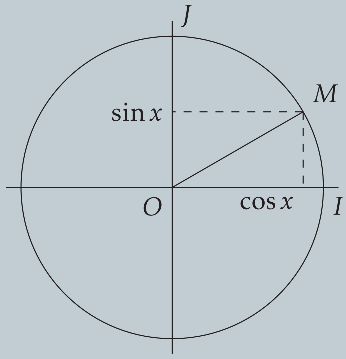
1 On appelle cercle trigonométrique un cercle de rayon 1, muni d'une origine $I(1;0)$ et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens direct ou sens trigonométrique.

2 À tout réel x, on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique en « enroulant » la droite des réels autour du cercle.



- La mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$ est égale à la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.
- $\cos x$ est l'abscisse de M et $\sin x$ est l'ordonnée de M.

3 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$:



a. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

b. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

c. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

d. $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

e. $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

f. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

g. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

h. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

4 Valeurs de référence :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exemple On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. En déduire $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\frac{2\pi}{3}$ et $\cos\frac{4\pi}{3}$.

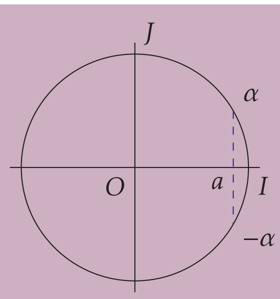
On a $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

On a $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ donc on a $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

On a $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ donc on a $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

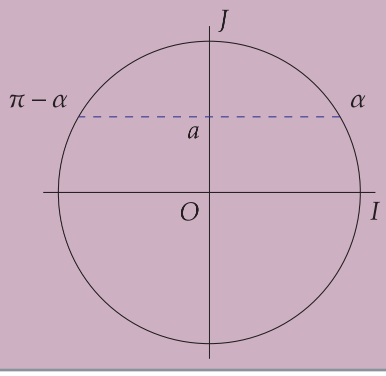
Méthode

Soit $a \in [-1;1]$.



1 Pour résoudre l'équation $\cos x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on utilise le cercle trigonométrique (voir ci-contre).

On obtient $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



2 Pour résoudre l'équation $\sin x = a$ pour $x \in \mathbb{R}$, on utilise le cercle trigonométrique (voir ci-contre).

On obtient $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

1 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$, l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ l'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$.

1 On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Donc on a $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$.

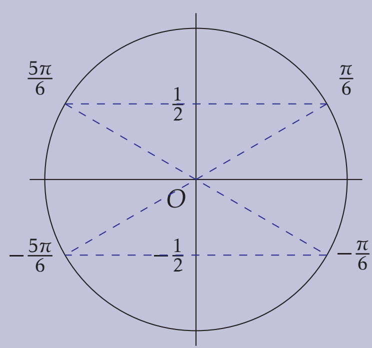
Donc l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$: $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

2 On a $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 Pour résoudre $\sin x = -\frac{1}{2}$,

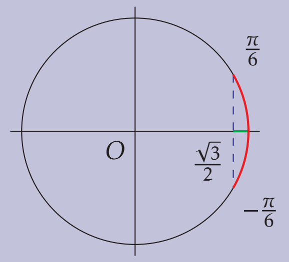
- on sait que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ donc on a
  $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$
  $\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
- donc l'équation a deux solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$.



Exemple

Résoudre l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

On a $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$.
Les solutions de $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.
Les nombres (de l'axe des abscisses) qui sont supérieurs à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont les abscisses des points de l'arc rouge (de la figure ci contre).
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle (dans le sens trigonométrique) :



$$S = \left]-\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{6}\right[.$$

Rappel

1 La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos : x \mapsto \cos x$.

2 La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin : x \mapsto \sin x$.

3 Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques donc au lieu de les étudier sur $\mathbb{R}$, on peut les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π comme l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$ et en déduire le reste par périodicité.

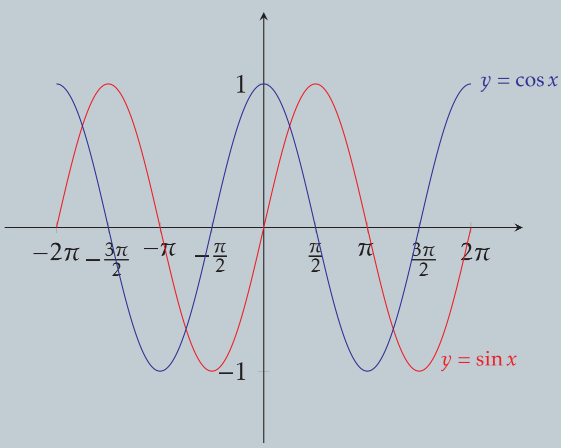
4 La fonction cos est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc on peut l'étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ (au lieu de l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$) et en déduire le reste par symétrie.

5 La fonction sin est impaire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère et donc on peut l'étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ (au lieu de l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi[$) et en déduire le reste par symétrie.

6 Tableaux de variations :

x	0		π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Exemple Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x)\sin(x)$.

1 Étudier la parité de g. Interpréter graphiquement.

2 Montrer que g est π-périodique.

1 g est définie sur $\mathbb{R}$, donc on a $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$.
Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = \cos(-x)\sin(-x) = \cos(x) \times (-\sin(x)) = -\cos(x)\sin(x) = -g(x)$.
Donc g est une fonction impaire.

2 $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $g(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(x+\pi) = -\cos(x) \times (-\sin(x)) = \cos(x)\sin(x) = g(x)$.
Donc g est π-périodique.

Exercices

01

1. Résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ dans $\mathbb{R}$. Préciser les solutions contenues dans l'intervalle $]0\ ;\ 4\pi]$.

3. Montrer que l'équation $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ a quatre solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis placer sur le cercle trigonométrique les quatre points correspondants.

4. Résoudre, dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, $4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$.

02

1. Résoudre $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

2. Résoudre $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

03

On admet la formule suivante, dite formule de linéarisation : $cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $sin^2(x)$ en fonction de $cos(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{8}$.

04

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(4x)\sin^2(4x)$.

1. Étudier la parité de g. Interpréter graphiquement.

2. Montrer que g est π-périodique.

05 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$.

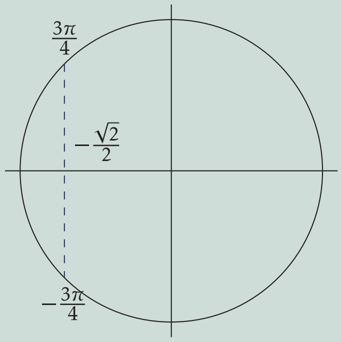
1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0 ; \pi]$. En déduire les variations de f sur $[0 ; \pi]$.
2. Montrer que f est impaire sur $[-\pi ; \pi]$. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.
3. Montrer que f est 2π-périodique.
4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur $[0 ; \pi]$ puis sur $[-4\pi ; 4\pi]$.

06 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\cos(x)}$. On note par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que f est paire et 2π-périodique. Interpréter graphiquement.
2. En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.
3. Pour cette question, on étudiera f sur l'intervalle $[\pi;-\pi]$.
   On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   - **a.** Résoudre l'inéquation $-\sin(x) geq 0$.
   - **b.** Montrer que f est croissante sur $[-\pi;0]$ et décroissante sur $[0;\pi]$.
   - **c.** En déduire les extrema locaux de f sur $[-\pi;\pi]$.

Éléments de corrigé des exercices

01



1 On a $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Donc sur $\mathbb{R}$, on a

$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Sur $]-\pi\,;\,\pi]$, on a $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

2 On a $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$ ou $x = \frac{9\pi}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

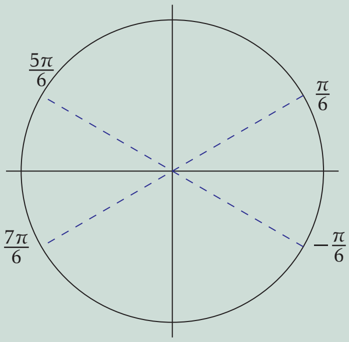
Donc sur $\mathbb{R}$, on a

$S = \left\{-\frac{\pi}{8} + 2k\pi, \frac{9\pi}{8} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Sur $]0\,;\,4\pi]$, on a $S = \left\{\frac{9\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{25\pi}{8}, \frac{31\pi}{8}\right\}$.

3 On a $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.



Donc sur $]-\pi\,;\,\pi]$, on a

$S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

4 On pose $X = \cos x$.

On a $4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 4X^2 - 2(1+\sqrt{3})X + \sqrt{3} = 0$.

On a $\Delta = 4(1-\sqrt{3})^2 > 0$.

Donc on a $X = \frac{2(1+\sqrt{3}) - 2(\sqrt{3}-1)}{8}$ ou $X = \frac{2(1+\sqrt{3}) + 2(\sqrt{3}-1)}{8}$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$ ou $X = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

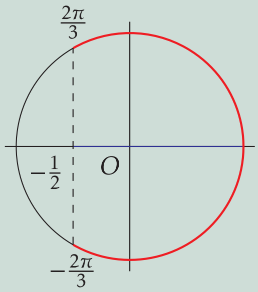
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Sur $]-\pi\,;\,\pi]$, on a $S = \left\{-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

02

1 Résoudre $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

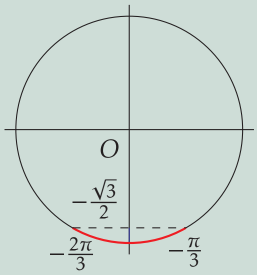
On présente les solutions en rouge sur le cercle trigonométrique :



Donc on a $S = \left[-\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$

2 Résoudre $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

On présente les solutions en rouge sur le cercle trigonométrique :



Donc on a $S = \left]-\dfrac{2\pi}{3}\,;\,-\dfrac{\pi}{3}\right[$

03

1 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} sin^2(x) &= 1-\cos^2(x) \\ &= 1-\frac{1+\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{2-1-\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{1-\cos(2x)}{2}. \end{aligned}$$

03 **(suite)**

3 Calcul de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)}{2}\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\ \text{ou}\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.$$

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ donc on a $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

4 Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)}{2}\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\ \text{ou}\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}.$$

$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ donc on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

04

1 g est définie sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $-x\in\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $g(-x)=\cos(-4x)\sin^2(-4x)=\cos(4x)(-\sin(4x))^2=\cos(4x)\sin^2(4x)=g(x)$.

Donc g est fonction paire sur $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique : la courbe de g, dans un repère orthogonal, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2 Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a $x+\pi\in\mathbb{R}$ et $g(x+\pi)=\cos(4x+4\pi)\sin^2(4x+4\pi)$.

Les fonctions cos et sin sont 2π-périodique donc on a $g(x+\pi)=\cos(4x)\sin^2(4x)=g(x)$.

D'où g est π-périodique.

05

1 Pour $x \in R$, on pose $u(x) = 3\sin x$ et $v(x) = 2 + \cos x$.

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $u'(x) = 3\cos x$ et $v'(x) = -\sin x$.

$2 + \cos x \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f = \dfrac{u}{v}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = \frac{3\cos x(2+\cos x) - 3\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{6\cos x + 3}{(2+\cos x)^2} = \frac{6\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{(2+\cos x)^2}.$$

2 On a $(2+\cos x)^2 > 0$, $\forall x \in [0\,;\,\pi]$,

donc $f'(x)$ est du signe de $\cos x + \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;\,\pi]$.

Sur $[0\,;\,\pi]$, on a $\cos x + \dfrac{1}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left[0\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

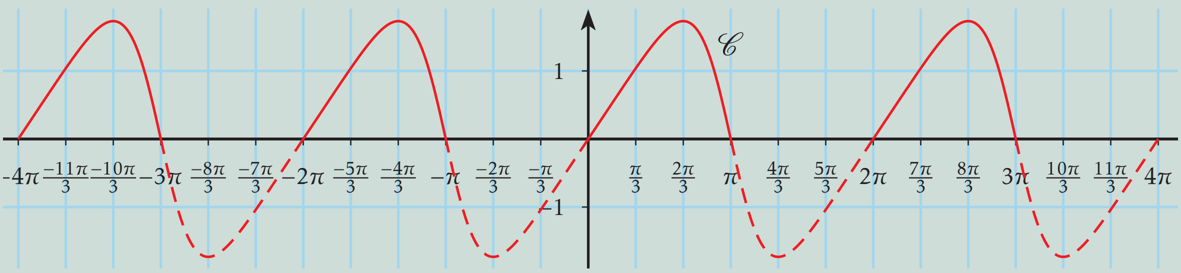
3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = \dfrac{3\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-3\sin x}{2+\cos x} = -\dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$ donc f est impaire.

On peut donc limiter l'étude de f à $[0\,;\,\pi]$. On peut en déduire que la fonction f est décroissante sur $[-\pi\,;\,\frac{-2\pi}{3}]$ et sur $[\frac{2\pi}{3}\,;\pi]$ et croissante sur $[-\frac{2\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}]$.

4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x+2\pi) = \dfrac{3\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = f(x)$ donc f est 2π-périodique.

5 On trace $\mathscr{C}$ sur $[0\,;\,\pi]$ puis sur $[-\pi\,;\,0]$ par symétrie centrale puisque f est impaire.

Enfin, comme f est 2π-périodique, on répète le motif tous les 2π par translation.



06

1 Parité de f :

f est défine sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $f(-x) = e^{\cos(-x)}$.

cos est paire sur $\mathbb{R}$ donc on a $f(-x) = e^{\cos(x)} = f(x)$.

Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique : la courbe de f, dans un repère orthogonal, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Périodicité de f :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $f(x+2\pi) = e^{\cos(x+2\pi)}$.

cos est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ donc on a $f(x+2\pi) = e^{\cos(x)} = f(x)$.

Donc f est 2π-périodique.

Interpréter graphique : la courbe de f sur $\mathbb{R}$ est obtenue à partir de sa courbe sur $[-\pi;\pi]$ par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$ et de vecteur $-2\pi\vec{i}$.

2 f est 2π-périodique donc on peut réduire son domaine d'étude à l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

f est paire sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi;\pi]$ et donc on peut réduire son domaine d'étude à $[0;\pi]$.

Donc le plus petit intervalle I possible pour étudier f est $[0;\pi]$.

3 Pour cette question, on étudiera f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a. On a $-\sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-\pi;0]$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$ et $e^{\cos(x)} > 0$ donc $f'(x)$ et $-\sin(x)$ sont de même signe.
Donc f est croissante sur $[-\pi;0]$ et décroissante sur $[0;\pi]$.

c. $f'(x)$ s'annule en 0 et f est croissante sur $[-\pi;0]$ et décroissante sur $[0;\pi]$ donc f admet un maximum local atteint en $x=0$.

Produit scalaire et géométrie vectorielle

Rappel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs du plan et $(\vec{u}\,, \vec{v})$ l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

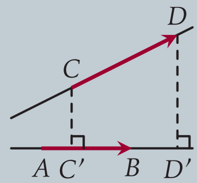
1 Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$

et défini par $\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$

2 $\vec{u}.\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$.

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

4 Soient A, B, C et D quatre points du plan.
Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB) alors
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.



5 Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ un repère orthonormal du plan.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

6 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a alors $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens ;} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens opposés.} \end{cases}$

7 Propriétés du produit scalaire :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ et $\vec{u}.\vec{0} = 0$.
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\vec{u}.\vec{v})$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
- $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ et $(k\vec{u}).\vec{v} = k \times (\vec{u}.\vec{v})$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

8 On considère deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

9 Formules d'Al Kashi : Dans un triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$. On a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.

10 Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

11 Dans un repère orthonormal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

12 Deux droites d et d' sont perpendiculaires si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exemples

1 Dans un repère orthonormé, on considère $A(0\ ;\ 0)$, $B(5\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 4)$.

a. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, AB et AC.

b. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
On donnera le résultat en degrés, arrondi à 0,1 près.

a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5\times 2 + 1\times 4 = 14$
- $AB = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$
- $AC = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b. De $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$,

on déduit que $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{14}{\sqrt{26}\times 2\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{130}}$.

En utilisant la calculatrice, on a $\widehat{BAC}\approx 52,1°$.

2 Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$.

Calculons $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(8^2-6^2-5^2\right) = \dfrac{3}{2}$.

3 Soit quatre points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(5\ ;\ 0)$, $C(3\ ;\ 4)$ et $D(6\ ;\ 13)$ dans un repère orthonormé.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$ donc on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 6\times 3 + (-2)\times 9 = 18-18 = 0$.

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, vecteurs directeurs des deux droites, sont orthogonaux donc que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

4 Déterminons l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2$ où A et B sont tels que $AB = 8$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2$ donc on a

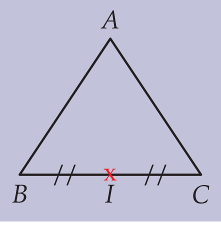
$MI^2 - \dfrac{1}{4}AB^2 = 2 \Leftrightarrow MI^2 = 2 + \dfrac{1}{4}AB^2 \Leftrightarrow MI^2 = 2 + \dfrac{1}{4}\times 8^2 = 18$ et donc $MI = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Donc l'ensemble recherché est le cercle de centre I le milieu de $[AB]$ et de rayon $3\sqrt{2}$.

Exemple

5 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$ et I est le milieu du segment $[BC]$.

Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$.



Le projeté orthogonal de A sur (BC) est I donc
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC} = BI \times BC = 2 \times 4 = 8$
Le projeté orthogonal de A sur (BC) est I donc
$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BC} = -CI \times BC = -2 \times 4 = -8$

Rappel

1 Dans le plan, on dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à une droite d s'il est orthogonal à un vecteur directeur de d.

$\vec{n}$ est alors orthogonal à tout vecteur directeur de d.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

2 Une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

3 Étant donnés trois réels a, b et c où a et b ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

4 Une équation cartésienne du cercle de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon R est $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$.

Exemple

1 Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3;-1)$ et $B(2;4)$. Déterminer une équation de la médiatrice d de $[AB]$.

La médiatrice de [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ est un verteur normal à d.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc une équation de d est de la forme $-x + 5y + c = 0$.

De plus, $I\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{2}\right) \in d$ donc $-\dfrac{5}{2} + 5 \times \dfrac{3}{2} + c = 0$ et donc $c = -5$.

Une équation cartésienne de d est donc $-x + 5y - 5 = 0$.

Exemple

2 Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal.

Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+2y+5=0$?

$$M(x;y)\in\mathcal{C} \Leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y+5=0 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+5=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+5=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=5.$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $C(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

3 On considère la droite d d'équation cartésienne $4x-5y-1=0$ et le point $A(-1;2)$.

Déterminons les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite d.

On a $d : 4x-5y-1=0$ donc un vecteur normal à d est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

Soit d' la droite passant par A et dirigée par $\vec{n}$.

- Déterminons une équation cartésienne de d'.
  Soit $M(x;y)\in d'$.
  $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$ donc on a $4(y-2)-(-5)(x+1)=0 \Leftrightarrow 4y-8+5x+5=0 \Leftrightarrow 5x+4y-3=0$.
  Donc une équation cartésienne de d' est $5x+4y-3=0$.
- Déterminons les coordonnées de H.
  H est le projeté orthogonal du point A sur la droite d donc $H\in d'$ et $H\in d$.
  On pose $H(x;y)$.
  $H(x;y)\in d$ donc on a $4x-5y-1=0$ et $H(x;y)\in d'$ donc on a $5x+4y-3=0$.
  On a donc $\begin{cases}4x-5y-1=0\\5x+4y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5(4x-5y-1)-4(5x+4y-3=0)=0\\5x+4y-3=0\end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases}20x-25y-5-20x-16y+12=0=0\\5x+4y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-41y+7=0\\5x+4y-3=0\end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{7}{41}\\5x+4y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{7}{41}\\5x+4\times\frac{7}{41}-3=0\end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{7}{41}\\5x-\frac{95}{41}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{7}{41}\\x=\frac{95}{41}\times\frac{1}{5}=\frac{19}{41}\end{cases}.$
  Donc on a $H\left(\frac{19}{41};\frac{7}{41}\right)$.

Exercices

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

01 On considère les points $A(4;-1)$, $B(-3;-1)$ et $C(-1;3)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. On appelle H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
   En calculant autrement le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, en déduire la longueur AH.
3. Donner une valeur en degrés, arrondie à 0,1 près, de l'angle $\widehat{BAC}$.

02 $ABCD$ est un carré de côté 8 cm, BEC est un triangle équilatéral extérieur au carré et I est le milieu du segment $[BC]$.

1. Calculer les produits scalaires suivants :

   a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$. **b.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$. **c.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$. **d.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2. Calculer également $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. On rappelle que la hauteur du triangle équilatéral BEC vaut $4\sqrt{3}$ cm.
   Calculer alors les produits scalaires suivants.

   a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE}$. **b.** $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CD}$. **c.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IE}$.

03 On considère la droite d d'équation cartésienne $3x + y - 4 = 0$ et le point $B(2;-3)$.

1. Donner un vecteur normal à la droite d.
2. Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à d passant par B.
3. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point B sur la droite d.

04 On considère un triangle ABC avec $A(1;-3)$, $B(-2;4)$ et $C(3;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
2. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de A sur (BC).
3. Calculer la longueur AH.
4. En déduire l'aire du triangle ABC.

05 On considère l'ensemble E des points du plan vérifiant l'équation : $x^2 - 3x + y^2 + y - 2 = 0$.

1. Justifier que cet ensemble est une équation cartésienne d'un cercle. Préciser les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle.
2. Déterminer si les points $G(1;-2)$ et $N(3;-2)$ appartiennent à ce cercle.

06 On considère les points $A(1;4)$, $B(5;1)$, $C(7;3)$ et $D(1;1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de d, la médiatrice de $[CD]$.
2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
3. Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d.

Éléments de corrigé des exercices

01

1 On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ donc on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=35$.

2 H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) donc on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$ donc on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$.

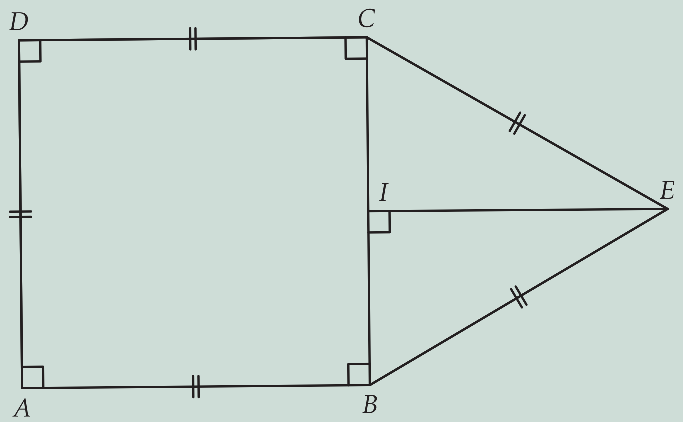
$AB=7$ donc on a $AB\times AH=35 \Leftrightarrow AH=\dfrac{35}{7}=5$.

3 On a $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$.

$AB=7$, $AC=\sqrt{41}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=35$ donc on a $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$.

En utilisant la calculatrice, on a $\widehat{BAC}\simeq 37{,}7$.

02 Une figure pour illustrer l'énoncé :



1 **a.** On a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=64$.

b. On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=AB\times DC=64$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=64$.

d. Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires donc on a $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

2 On a $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=BC\times BE\times\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{64\times 1}{2}=32$.

On a $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CB}=-CE\times CB\times\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-32$.

3 **a.** On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IE}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IE}=0+8\times 4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$.

b. De la même manière, on trouve $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD}=-32\sqrt{3}$.

c. On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IE}=-BA\times IE=-32\sqrt{3}$.

03

1 $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d.

2 d' est perpendiculaire à d donc $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'.

Donc d' a comme équation cartésienne : $x-3y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$.

$B(2;-3)\in d'$ donc on a $2+9+c=0$ et donc $c=-11$.

D'où d' : $x-3y-11=0$.

3 En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point B sur la droite d.

d' est perpendiculaire à d en passant par B donc H le projeté orthogonal du point B sur la droite d est le point d'intersection de d et d'.

Pour déterminer les coordonnées de H, on résout le système :

$$\begin{cases}3x+y-4=0\\x-3y-11=0\end{cases}$$

On a $\begin{cases}3x+y-4=0\\x-3y-11=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{23}{10}$ et $y=-\dfrac{29}{10}$.

Donc on a $H\left(\dfrac{23}{10},-\dfrac{29}{10}\right)$.

04

1 On a note par d la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d.

Donc on a d : $5x-4y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$.

A est un point de d donc on a $5-12+c=0$ et donc $c=7$.

D'où d : $5x-4y+7=0$

2 Déterminons d'abord une équation cartésienne de la droite (BC).

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BC).

On a donc $M(x;y)\in(BC)\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow -4(x+2)-5(y-4)=0\Leftrightarrow -4x-5y+12=0$.

Donc $-4x-5y+12=0$ est une équation cartésienne de la droite (BC).

Les coordonnées de H est le couple solution du système $\begin{cases}5x-4y+7=0\\-4x-5y+12=0\end{cases}$.

$\begin{cases}5x-4y+7=0\\-4x-5y+12=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{13}{41}$ et $y=\dfrac{88}{41}$.

Donc on a $H\left(\dfrac{13}{41},\dfrac{88}{41}\right)$.

3 $AH=\sqrt{\left(\dfrac{13}{41}\right)^2+\left(\dfrac{88}{41}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7913}}{41}\simeq 2,2$.

4 On a $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AH=\sqrt{193}\simeq 13,9$.

05

1 On a $x^2-3x+y^2+y-2=0 \Leftrightarrow x^2-2\times\frac{3}{2}\times x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2\times\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{18}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$.

Donc E est un cercle de centre de coordonnées $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

2 On a $^2-3\times 1+(-2)^2-2-2=-2\neq 0$ donc $G\notin E$.

On a $3^2-3\times 3+(-2)^2-2-2=0$ donc N est un point du cerle E.

06

1 $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d donc $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

Donc on a $d\,:\,3x+y+c=0$ où $c\in\mathbb{R}$.

$I\,(4;2)\in d$ donc on a $12+2+c=0 \Leftrightarrow c=-14$.

D'où $d\,:\,3x+y-14=0$.

2 On a $M(x,y)\in\mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-5\\y-1\end{pmatrix}$ donc on a

$(x-1)(x-5)+(y-4)(y-1)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-5y+9=0$.

Donc une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est $x^2-6x+y^2-5y+9=0$.

3 On a $M(x;y)\in\mathcal{C}\cap d \Leftrightarrow \begin{cases}3x+y-14=0\\x^2-6x+y^2-5y+9=0\end{cases}$.

On a $\begin{cases}3x+y-14=0\\x^2-6x+y^2-5y+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=14-3x\\x^2-6x+y^2-5y+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=14-3x\\10x^2-75x+135=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=14-3x\\2x^2-15x+27=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=14-3x\\x=3 \text{ ou } x=\frac{9}{2}\end{cases}$.

Si $x=3$ alors on a $y=14-3\times 3=5$ et si $x=\frac{9}{2}$ alors $y=14-\frac{27}{2}=\frac{1}{2}$.

Donc d et $\mathcal{C}$ se coupent en deux points de coordonnées $(3;5)$ et $\left(\frac{9}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Partie 8

Bases du calcul

Introduction

Cette partie est destinée à ceux qui ont du mal sur les bases de calcul.

I Calcul fractionnaire

Méthodes

- ▷ Tout nombre réel non nul x admet un seul inverse noté x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$.
- ▷ Pour tous nombres réels a et b avec $b \neq 0$, on a $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b} = a \times b^{-1}$.
- ▷ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$.
- ▷ $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$, $b \neq 0$.
- ▷ $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, $b \neq 0$ et $d \neq 0$, en particulier : $c \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{1} \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{ca}{b}$.
- ▷ $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
- ▷ $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.
- ▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- ▷ Addition de deux fractions : pour ajouter deux fractions, il faut d'abord réduire les deux nombres en écriture fractionnaire au même dénominateur. Ensuite, on additionne les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

01 Exprimer sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier chacun des nombres suivants.

1 $A = 7 \times \dfrac{3}{7}$. **2** $B = \dfrac{-15}{-21} \times \dfrac{-7}{5}$. **3** $C = \dfrac{187}{292} \times \dfrac{2920}{1870}$. **4** $D = -12 \times \dfrac{-5}{3} \times \dfrac{32}{25}$.

02 Exprimer sous forme d'une fraction irréductible ou d'un entier chacun des nombres suivants.

1 $A = \dfrac{\frac{13}{3}}{2}$.

2 $B = \dfrac{13}{\frac{3}{2}}$.

3 $C = \dfrac{\frac{-3}{14}}{\frac{18}{-21}}$.

4 $D = \dfrac{1 - \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}}$.

03 Ecrire sous forme de fraction irréductible chacun des rationnels suivants (on cherchera d'abord les facteurs communs aux dénominateurs).

1 $A = \dfrac{1}{12} - \dfrac{3}{24} + \dfrac{1}{18}$.

2 $B = \dfrac{8}{49} - \dfrac{1}{14} + \dfrac{2}{21}$.

3 $C = \dfrac{3}{136} + \dfrac{5}{68} - \dfrac{1}{51}$.

4 $D = \dfrac{9}{1312} - \dfrac{89}{13120}$.

5 $E = \dfrac{5}{2373} - \dfrac{1}{2260}$.

6 $F = \dfrac{1}{1271} + \dfrac{1}{1353}$.

04 Ecrire sous forme d'un seul quotient chacun des nombres suivants, où a, b et c sont des réels non nuls.

1 $A = a + \dfrac{1}{b}$.

2 $B = a + \dfrac{c}{b}$.

3 $C = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$.

4 $D = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$.

5 $E = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}$.

6 $F = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$.

05 Ecrire sous la forme la plus simple possible chacun des nombres suivants, où a, b, c et d sont des réels tels que les quantités figurant dans des dénominateurs soient non nulles.

1 $A = \dfrac{abc}{bcd}$.

2 $B = \dfrac{\frac{1}{abcd}}{\frac{bc}{ad}}$.

3 $C = \dfrac{(a-b)^2(a+b)c^2}{c(a-b)}$.

4 $D = \dfrac{\frac{a-b}{c}}{\frac{c}{a+b}}$.

06 Ecrire sous la forme la plus simple possible chacune des expressions suivantes, où x est un réel tel que les quantités figurant dans des dénominateurs soient non nulles.

1 $A = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x}$.

2 $B = \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{1}{3x}$.

3 $C = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{x-1}{x^2}$.

4 $D = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{2x(2x+1)}$.

5 $E = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x+12}{12}}$.

07 Écrire sous la forme d'un seul quotient.

1 $A = \dfrac{3x-2}{5x-3} - \dfrac{2-3x}{7x-2}$

2 $B = \dfrac{5-12x}{3x-5} + \dfrac{-60x+25}{-6x-13}$

3 $V = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}$

4 $I = \dfrac{5}{2x-1} + 1$

5 $T = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x-1}{3x+5}$

6 $E = \dfrac{x}{1-5x} + \dfrac{2}{x+1}$

II Puissances

Méthodes

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}}$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. $(0^n = 0)$.

▷ $0^0 = 1$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ est l'inverse de a.

▷ Si a est positif alors a^n est positif.

▷ Si a est négatif alors on a deux cas :
Si n est un nombre pair alors a^n est positif ;
Si n est un nombre impair alors a^n est négatif ;

▷ $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

▷ $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

▷ $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

▷ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

▷ $(a^n)^m = a^{nm}$.

▷ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

Exemples

1. $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$.
2. $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$.
3. $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$.
4. $\dfrac{11^7}{11^4} = 11^{7-4} = 11^3$.
5. $2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$.
$(5 \times 7)^3 = 5^3 \times 7^3$.
6. $\dfrac{8^7}{4^7} = \left(\dfrac{8}{4}\right)^7 = 2^7$.
7. $\left(\dfrac{11}{3}\right)^2 = \dfrac{11^2}{3^2}$.
8. $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$.
9. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$.

08 a désignant un réel non nul, exprimer sous forme d'une puissance de a les réels suivants.

1. $A = a^8 a^{-1}$.
2. $B = a^3 a^{-2}$.
3. $C = \dfrac{a^6}{a^3}$.
4. $D = \dfrac{a^{26}}{a^{23}}$.
5. $E = \dfrac{a^{55}}{a^{54}}$.
6. $F = \dfrac{a^{-3}}{a^{-5}}$.
7. $G = \dfrac{a^{-1}}{a^{-2}}$.
8. $H = \left(a^2\right)^{-2}$.
9. $I = \left(a^{-1}\right)^{-1}$.
10. $J = \left(\dfrac{a^{-2}}{a^3}\right)^{-2}$.
11. $K = \left(\left(\dfrac{a^2}{a^{-3}}\right)^{-1}\right)^2$.

09 Soit a, b et c des réels non nuls. Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = \left(a^{-3}b^2\right)^{-3}$.
2. $B = \dfrac{\left(a^{-2}b\right)^4}{a^{-2}b^{-2}}$.
3. $C = \dfrac{a^3b^2c^4}{a^2bc^5}$.
4. $D = \dfrac{a^{-3}b^4c}{ab^{-1}c^2}$.
5. $E = \dfrac{a^{-1}b^4c^{-3}}{a^2b^4c^{-5}}$.

10 Soit a et b des réels non nuls. Ecrire sous la forme $a^n b^m$ les réels suivants.

1 $A = \dfrac{1}{\frac{a}{b}}$.

2 $B = \dfrac{a}{\frac{1}{b}}$.

3 $C = \dfrac{b^{-1}}{a^{-1}}$.

4 $D = \dfrac{\frac{1}{b}}{a}$.

5 $E = \dfrac{\frac{1}{\frac{a}{b}}}{a^2}$.

11 Soit a, b et c des réels non nuls. Ecrire sous la forme $a^n b^m c^p$ les réels suivants.

1 $A = \left(a^{-1}bc^2\right)^2$.

2 $B = \left(a^{-1}b^{-1}c\right)^{-2}$.

3 $C = \left(\dfrac{a^2 b}{c^3}\right)^{-1}$.

4 $D = \dfrac{\left(a^2 bc\right)^3}{(ab)^2}$.

12 Soit n un entier naturel. Simplifier les expressions suivantes.

1 $A = 2 \times 2^n$.

2 $B = \dfrac{2^{n+1}}{2}$.

3 $C = 2^{3n} \times 2^n$.

4 $D = \dfrac{3^{2n+1}}{3^{n+1}}$.

5 $E = 5^{-2n} \times 5^{3n}$.

6 $F = 2^n \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Simplifier les expressions suivantes.

1 $A = a^n \times a$.

2 $B = a^{3n} \times a$.

3 $C = \dfrac{a^{2n+1}}{a}$.

4 $D = \dfrac{a^{n+2}}{a^2}$.

5 $E = a^{2n} \times a^{-n}$.

6 $F = a^{4n} \times a^{-1}$.

7 $G = \dfrac{a^{-2n+1}}{a^{-n}}$.

8 $H = \dfrac{a^{4n}}{a^4}$.

9 $I = a^{n+1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.

10 $J = \dfrac{a^n}{a^{2n}}$.

11 $K = (-a)^n(-b)^n$.

III Racines carrées

Méthodes

Soit $a \in [0\,;+\infty[$ et $b \in [0\,;+\infty[$.

- ▷ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.
- ▷ $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- ▷ Si de plus $b \neq 0$, on a $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- ▷ Si $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemples

1. $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6.$
2. $\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=\sqrt{9}\times\sqrt{3}=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$
3. $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}.$
4. $\sqrt{\dfrac{7}{9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}.$
5. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\dfrac{2}{8}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}.$

Remarque

$\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$; en effet :
$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ <u>mais</u> $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$

Exemple

1. $\left(\sqrt{3}-2\right)^2=\sqrt{3}^2-2\times\sqrt{3}\times 2+2^2=3-4\sqrt{3}+4=7-4\sqrt{3}.$
2. $\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$
3. $\sqrt{12}-2\sqrt{48}=\sqrt{4\times 3}-2\sqrt{16\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}-2\sqrt{16}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\times 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}-8\sqrt{3}=-6\sqrt{3}.$

14

1. $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3).$
2. $(5+\sqrt{3})^2.$
3. $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}).$
4. $(\sqrt{5}-2)^2.$
5. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$
6. $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2.$

15 Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

1. $\sqrt{75}.$
2. $\sqrt{108}.$
3. $\sqrt{40}-\sqrt{160}.$
4. $\sqrt{48}+\sqrt{27}.$
5. $2\sqrt{500}-3\sqrt{75}.$
6. $5\sqrt{24}-\sqrt{54}+2\sqrt{150}.$
7. $-3\sqrt{63}+5\sqrt{49}+7\sqrt{28}.$
8. $-3\sqrt{18}+7\sqrt{72}-5\sqrt{44}+4\sqrt{99}.$

16 Écrire les nombres suivants avec un dénominateur **entier** :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$
2. $\dfrac{14}{\sqrt{7}}.$
3. $\dfrac{-10}{3\sqrt{5}}.$
4. $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}.$
6. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$

17

1 On pose $x = 1 + \sqrt{3}$ et $y = 1 - 2\sqrt{3}$.
On mettra les résultats sous la forme $a + b\sqrt{3}$, où a et b sont des entiers.

a. Calculer $x + y$ et $x - y$.
b. Calculer x^2 et y^2.
c. Calculer $x^2 - y^2$ de deux manières différentes.

2 On donne $A = x^2 - 2x - 7$
On mettra les résultats sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont des entiers.

a. Calculer A pour $x = \sqrt{2}$
b. Calculer A pour $x = 5 - \sqrt{2}$
c. Calculer A pour $x = 2\sqrt{2} + 1$

18 Est-il vrai que les nombres $A = 2 + \sqrt{3}$ et $B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ sont égaux ? Justifier votre réponse.

IV Calcul littéral

Méthode

Soit a, b, c, d et k cinq réels.
Pour développer une expression, on utilise :

- $k(a+b) = ka + kb$ et $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
- Les identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Exemples

1

$$\begin{aligned} A &= 3x(2x+7) \\ &= 3x \times 2x + 3x \times 7 \\ A &= 6x^2 + 21x. \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} D &= (5x+3)^2 \\ &= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ D &= 25x^2 + 30x + 9. \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} C &= (5x-2)(-3x+7) \\ &= 5x \times (-3x) + 5x \times 7 - 2 \times (-3x) - 2 \times 7 \\ &= -15x^2 + 35x + 6x - 14 \\ C &= -15x^2 + 41x - 14. \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} E &= (7x-2)(7x+2) \\ &= (7x)^2 - 2^2 \\ C &= 49x^2 - 4. \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} E &= (-5x+3)(2x+7) - (3x+1)(-2x-4) \\ &= -5x \times 2x - 5x \times 7 + 3 \times 2x + 3 \times 7 - (3x \times (-2x) + 3x \times (-4) + 1 \times (-2x) + 1 \times (-4)) \\ &= -10x^2 - 35x + 6x + 21 - \left(-6x^2 - 12x - 2x - 4\right) \\ &= -10x^2 - 29x + 21 - \left(-6x^2 - 14x - 4\right) \\ &= -10x^2 - 29x + 21 + 6x^2 + 14x + 4 \\ E &= -4x^2 - 15x + 25. \end{aligned}$$

19 Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = 2x(3x-5)$.
2. $B = (5x-2)(3x+7)$.
3. $C = (7+6x)^2$;
4. $D = (2x-3)^2$;
5. $E = (2x+3)(2x-3)$;
6. $F = (11x-7)(11x+7)+(3-x)^2$;
7. $G = (2x-5)^2-(3x-2)(2x+3)$;
8. $H = (5x-2)(1+x)-(3+7x)^2$.

Méthodes

Soit a, b et k trois réels.
Pour factoriser une expression, on utilise :

- $\underline{k}a+\underline{k}b = k(a+b)$.
- $\underline{k}a-\underline{k}b = k(a-b)$.
- Les identités remarquables :

$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b).$$

Exemples

1

$$
\begin{aligned}
D &= 3x^2 + 5x \\
&= 3x \times \underline{x} + 5 \times \underline{x} \\
D &= x(3x + 5).
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
F &= 6\underline{(3x-1)} - \underline{(3x-1)}(-7x+10) \\
&= (3x-1)(6-(-7x+10)) \\
&= (3x-1)(6+7x-10) \\
E &= (3x-1)(7x-4).
\end{aligned}
$$

3

$$
\begin{aligned}
D &= (2x+1)^2 - 16 \\
&= (2x+1)^2 - 4^2 \\
&= (2x+1+4)(2x+1-4) \\
D &= (2x+5)(2x-3).
\end{aligned}
$$

4

$$
\begin{aligned}
E &= 25 - (3x-1)^2 \\
&= 5^2 - (3x-1)^2 \\
&= (5+3x-1)(5-(3x-1)) \\
&= (3x+4)(5-3x+1)) \\
E &= (3x+4)(-3x+6).
\end{aligned}
$$

5

$$
\begin{aligned}
F &= (2x+1)^2 - (-5x+3)^2 \\
&= (2x+1+(-5x)+3)(2x+1-(-5x+3)) \\
&= (-3x+4)(2x+1+5x-3)) \\
F &= (-3x+4)(7x-2).
\end{aligned}
$$

6

$$
\begin{aligned}
G &= 2x^2 - 8 \\
&= 2x^2 - 2 \times 4 \\
&= 2(x^2 - 4) \\
&= 2(x^2 - 2^2) \\
G &= 2(x+2)(x-2).
\end{aligned}
$$

20 En mettant en évidence un facteur commun, factoriser les expressions suivantes.

1 $M = (23x+1)(-17x+1)+(23x+1)^2$.

2 $A = (13x-14)(25x-11)-(13x-14)^2$.

3 $N = (8-18x)^2-(16x-3)(8-18x)$.

4 $U = (11-2x)(9-7x)+(2x-11)(11x+2)$.

5 $E = (6x+23)(6x-5)-(19x-6)(5-6x)$.

6 $L = (16x+13)(21x-3)+(16x+13)$.

7 $S = (-14x+5)-(4x-7)(-14x+5)$.

21 En mettant en évidence une différence de deux carrés, factoriser les expressions suivantes.

1 $H = x^2-121$.

2 $E = (x-4)^2-36$.

3 $R = x^2-5$.

4 $T = 25-(2-x)^2$.

5 $Z = (x+3)^2-(2x+4)^2$.

22 Factoriser en utilisant une identité remarquable.

1 $T = 9x^2+12x+4$.

2 $H = x^2+169-26x$.

3 $A = 144x+144x^2+36$.

4 $L = 49x^2+25-70x$.

5 $E = 9x^2-24x+16$.

6 $S = -22x+121x^2+1$.

23 Choisir la bonne méthode pour factoriser les expressions suivantes.

1 $P = (6x-4)(2x+5)-(3x+2)(2x+5)$.

2 $Y = (4x-5)^2-(9-13x)^2$.

3 $T = 25x^2+9-30x$.

4 $H = (5x-7)(3x-2)-(x-8)(3x-2)$.